ELEMENTI

DI

GEOMETRIA

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA

DI

A. M. LEGENDRE

CON NOTE DELLO STESSO

RIVEDUTI INTIERAMENTE
E CORREDATI DI COPIOSE NOTE ED AGGIUNZIONI

PER

ENRICO DE ANGELIS

NAPOLI
STAMPERIA DEL FIBRENO
1853

PREAMBOLO

Il Legendre, quel sommo geometra che tutti sanno, a cui si debbono i più preziosi monumenti pei quali si levarono in Francia nello scorso secolo a sì sublime altezza le scienze Matematiche, quali sono il *Trattato delle funzioni ellittiche*, gli *Esercizi di calcolo integrale*, la *Teorica dei numeri*, e tante altre minori scritture sui più nuovi e momentosi argomenti, non isdegnò in mezzo a così alte meditazioni di por mano a questi *Elementi di Geometria*; veggendo, cred'io, come male si convenisse in tanto lume e movimento della scienza il vedere ancora a mano dei giovani il libro di Euclide, od altri dettati tutti su quel modello, e lasciare che i primi rudimenti fossero con tanto intollerabile ineleganza e pesantezza instillati, e non punto secondo che dallo spirito del nuovo metodo si richiedeva. Oggimai è cosa pur troppo nota che l'Analisi, o vogliam dire la scienza universale dei numeri, i quali sono l'essenza delle Matematiche, contiene i principii generali di tutte le verità astratte sulle leggi della quantità ed è come il lume supremo che rischiara potentemente la via a tutte le differenti applicazioni. Fra di queste è appunto la Geometria; e gli antichi che non avevano il predetto lume in loro mani, non procedevano con certezza ed unità di metodo, ma giugnevano a

particolari risultamenti colla sola industria dell' ingegno loro; il che fu certo maraviglioso; nè altrimenti poteva avvenire allora che la scienza erasi per anco bambina. Per la qual cosa non si scorge negli scritti loro quella eleganza, semplicità ed economia, e in generale quel vero sapore scientifico che dispone ogni cosa secondo che veramente dalla materia si richiede, e mette per quella via donde più direttamente viene aggiunto lo scopo. Ma tale per lo contrario è l' impronta dell' opera del Legendre, e meritamente ella contribuì, non meno che le altre più illustri, a rendere tanto popolare così in Francia come fuori il nome del suo autore, e fu tradotta e adottata per l' insegnamento in tutte quelle nazioni ove i buoni studi hanno radice. E certo chi ha fior di senno non può a meno di saper grado altamente a chi operò con sì prezioso lavoro che si smettesse lo studio di un libro quanto ammirevole pel tempo in cui nacque, altrettanto povero, pesante e rozzo nell' incomparabile grado in cui sono oggi progredite le Matematiche. Si paragoni la gran mole del libro di Euclide a quella del Legendre e si vegga quanto minor materia è contenuta nel primo che nel secondo. Dov' è in Euclide la misura degli angoli rettilinei, diedri e poliedri? dove quella del trapezio, del cerchio, della sfera, del cono, del cilindro, e dei tronchi piramidale, prismatico e conico? dov' è la dottrina dei poligoni isoperimetri, così rettilinei come sferici? dove quella dei poliedri simmetrici e dei poliedri simili, quando pure di questi ultimi non vogliasi ammettere quello che così malamente ne dice esso Euclide? dov' è parola dei cerchi massimi e minori della sfera, e dei loro poli, e dei triangoli e poligoni sferici? e dove quindi del fuso, della zona, dell' unghia sferica, del segmento sferico, della piramide sferica e del settore sferico? E che labirinto è mai quello che ci pre-

sentano in Euclide i poliedri regolari, a petto alla limpidezza ed eleganza onde gli espone il Legendre? In Euclide poi si è ignari al tutto delle relazioni che esistono tra le costole, le facce, e gli angoli rettilinei e poliedri di un poliedro; laddove nel Legendre troviamo il bel teorema di Eulero che in un poliedro qualunque il numero delle facce più quello degli angoli poliedri eccede di 2 il numero delle costole; la quale proposizione, siccome completamente svolge il Legendre nelle preziosissime note ond' egli ha corredata quest' opera, è feconda di moltissime conseguenze le quali stabiliscono tutti i limiti e le relazioni che hanno il numero dei lati nelle varie facce, e degli angoli rettilinei negli angoli di uno stesso poliedro. Oltre poi di tanti vòti, tacciamo le irregolarità del metodo onde quella poca materia viene da Euclide esposta, e le ripetizioni inutili, e le lungaggini noiose, e la nulla eleganza delle dimostrazioni. Vogliamo che questo breve ricordo rimanga ai giovani studiosi, perchè non ismarriscano la verace via. Per la quale ragione, speriamo che ci saranno indulgenti coloro i quali potrebbero apporci lo aver noi richiamati in campo certi confronti dei quali è passato anche il tempo di ridere.

Le molte note, aggiunzioni e modifiche da noi fatte a quest' opera, non si debbono tenere che come un mezzo di rendere vie più accessibile e profittevole l'immenso tesoro ch'è nascoso implicitamente nel Legendre, a cui male quelli che non l'intesero, hanno apposto mancanza o svolgimento incompleto di certe cose che sono in Euclide; chè anzi non ci ha cosa in quest' ultimo che non si trovi o non si possa agevolmente ricavare dal Legendre, siccome noi in molte parti ove ci cadeva in acconcio, non abbiam tralasciato di far notare. Non abbiamo chiamato *traduzione* questo nostro lavoro, perchè tale esso non è veramente, e le nostre aggiunzioni fanno un sol corpo col

testo del Legendre. Moltissimi nostri corollarii e scolii si troveranno posti dopo le sue proposizioni; queste stesse spesse volte han cangiato di luogo, o sono state enunciate in un modo più generale, o vi si veggono le reciproche; parecchie altre proposizioni si vedranno anche da noi aggiunte; e in ultimo alcune teoriche sono state completate o modificate, come sono quelle dell' uguaglianza dei triangoli rettilinei, delle parallele e della simiglianzá dei poligoni. Osiamo pertanto sperare di offrire al pubblico il trattato più completo e più atto all'insegnamento di quanti si trovino oggidì in Napoli, quando pure le nostre assidue fatiche e il grande amore che per queste scienze c'infiamma, non ne abbian tratti in inganno.

ERRORI CORREZIONI

Fac. — Verso.

2 — 18 *scendendo* le linee ....le superficie
11 — 3 *salendo* uguali ....disuguali
20 — 12 *salendo* DC ....DE
20 — 14 *scendendo* DF....................DE
21 — 10 *salendo* AC ....BC
27 — 9 *salendo* EF ....BF
28 — 7 *scendendo* AF ....BF
30 — 2 *salendo* congiunto AF ....congiunto BF
39 — 1 e 2 *salendo* due retti...............un retto
41 — 15 *scendendo* $\frac{5}{6}$ ....$\frac{6}{5}$
44 — 18 *scendendo* Nei tre ....Nei due
44 — 20 *scendendo* retti o acuti ....retti ed ottusi
72 — 16 *scendendo* da due corde *aggiungi*. .che s' intersegano
109 — 12 e 13 *scendendo* $\overline{AD}^2 = BD + DC$...$\overline{AD}^2 = BD \times DC$
164 — 11 *scendendo* $AC^2 : DO^2$...........$AC : DO$
197 — *Alla fine della proposizione VII si aggiunga: Scolio.* L' angolo ABP è ciò che chiamasi *l' inclinazione dell' obbliqua* AB *sul piano* MN; si vede che questa inclinazione è uguale per tutte le obblique AB, AC, AD, ec. che si allontanano ugualmente dalla perpendicolare; perchè tutti i triangoli APB, ACP, ADP, ec. sono uguali tra loro.

L'angolo ABP è minore di ogni altro angolo che formerebbe l' obbliqua AB con una retta differente da BP tirata dal punto B sul piano MN.

312 — 5 *scend.* la metà di questo eccesso è $\frac{1}{4}$ C la metà di questo eccesso è $\frac{1}{8}$ C
318 — 6 *salendo* $\frac{3}{4}\pi R^3$......................$\frac{4}{3}\pi R^3$

ELEMENTI
DI GEOMETRIA

PARTE PRIMA
GEOMETRIA PIANA

LIBRO PRIMO
PRINCIPII FONDAMENTALI.

DEFINIZIONI

I. La *Geometria* è la scienza dell'estensione.

L'estensiono ha tre dimensioni, ciò sono lunghezza, larghezza e profondità, ovvero altezza.

II. La *linea* è una lunghezza senza larghezza.

Le estremità della linea si chiamano *punti*. Il punto non ha dunque alcuna dimensione, ch'è quanto dire non ha parti, o grandezza.

III. La *linea retta* è il più corto cammino da un punto ad un altro; o in altri termini, è la più corta di tutte quelle lineo che ponno menarsi da un punto ad un altro.

La distanza di due punti si stima quanto la linea retta che li congiunge.

IV. *Linea curva* è ogni linea che non è retta, nè composta da linee rette. La linea composta da più linee rette chiamasi linea *spezzata*.

Così AB (fig. 1) è una linea retta, ACBD una linea spezzata ed AEB una linea curva.

V. *Superficie* è ciò che ha lunghezza e larghezza senza profondità, ovvero spessezza.

VI. La *Superficie piana* o il *piano* è quella superficie nella quale presi due punti ad arbitrio e congiunti con una linea retta, questa linea retta giace tutta quanta nella superficie.

VII. *Figura piana* è un piano terminato.

I termini della superficie sono le linee.

VIII. *Superficie curva* è ogni superficie che non è piana nè composta da superficie piane.

IX. *Esteso* è ciò che ha lunghezza, larghezza e profondità.

X. *Solido* o *corpo* o *figura solida* è un esteso che può esser mosso, ch'è quanto dire è un esteso terminato.

I termini del corpo sono le linee.

XI. Allorchè due linee rette s'incontrano (fig. 2), la quantità più o meno grande, per la quale esse distano l'una dall'altra, in quanto alla loro posizione dicesi *angolo*. Il punto d'incontro o d'*intersezione* è il *vertice* dell'angolo; e le due linee rette ne sono i *lati*.

Da ciò vedesi che la grandezza dell'angolo non consiste nella lunghezza dei suoi lati, ma sì nella loro maggiore o minore apertura.

XII. Qualora una linea retta incontrandone un'altra, fa con essa gli angoli da una parte e dall'altra, o, come suol dirsi, adiacenti eguali fra loro, ciascuno di questi angoli si chiama *angolo retto*: e quella linea retta dicesi *perpendicolare* all'altra (fig. 3).

XIII. *Angolo ottuso* è ogni angolo maggiore del retto, *acuto* ogni angolo minore (fig. 4).

XIV. Due linee rette si dicono *parallele*, allorchè giacendo nel medesimo piano e prolungate a qualunque distanza da una parte e dall'altra, non s'incontrano mai (fig. 5).

XV. Le figure piane si distinguono in tre specie: *rettilinee*, quando le linee che le terminano sono tutte rette; *curvilinee* al-

lorchè siano terminate da una o da più linee curve, *mistilinee* qualora vi sieno linee rette e curve insieme. In questa prima parte della Geometria elementare, cioè nella piana, la quale appellasi così perchè appunto non trattasi in essa se non degli oggetti geometrici esistenti in un medesimo piano; mentre la solida considera quelli che stanno nello spazio; in questa prima parte, dico, noi non faremo parola se non di nna sola figura piana curvilinea, ch'è il cerchio, di cui si darà a suo luogo la definizione; e di due sole figure piane mistilinee il *segmento* e *il settore di cerchio;* le quali saranno anche definite in appresso. Tratteremo poi completamente delle rettilinee.

XVI. Le figure piane rettiline si chiamano anche più semplicemente poligoni (fig. 6). Le rette che terminano un poligono ne sono i *lati*. Tutti questi lati presi insieme formano il *contorno* o *perimetro* di esso poligono. I poligoni prendono differenti nomi secondo il vario numero dei loro lati. *Triangolo* è quello di tre lati; e qnesto è il più semplice, perchè, com'è evidente, una figura piana non può essere terminata da due linee rette; *quadrilatero* è quello di quattro lati; *pentagono* quello di cinque; *esagono* quello di sei: *ettagono* quello di sette; *ottagono* quello di otto; *enneagono* quello di nove; *decagono* quello di dieci; e così appresso aggiungendo sempre alle parole, onde s'enunciano in greco i numeri, la voce *gono* che in greco vuol dire angolo. Così si viene a nominare un poligono dal numero dei suoi angoli, ch'evidentemente è lo stesso che quello dei suoi lati.

XVII. Il triangolo distinguesi in sei specie, tre per rispetto ai lati, tre per rispetto agli angoli. Riguardo ai lati dicesi *equilatero* (fig. 7), quello che ha i suoi tre lati uguali; *isoscele* quello che ha solamente due lati uguali (fig. 8); *scaleno* quello che ha i suoi tre lati disuguali (fig. 9). Riguardo agli angoli, si chiama rettangolo quello che ha un angolo retto (fig. 10); e come sarà dimostrato appresso, un triangolo non può avere più di un angolo retto; *ottusangolo* quello che ha un sol angolo ottuso (fig. 9); e sarà pure dimostrato che in un triangolo non vi può essere più di un angolo ottuso; *acutangolo* quello di cui i tre angoli sono acuti (fig. 8).

Nel triangolo rettangolo chiamasi *ipotenusa* il lato opposto all'angolo retto, e soglionsi anche dire *cateti* gli altri due lati. I

triangoli acutangoli ed ottusangoli si chiamano promiscuamente triangoli *obbliquangoli*.

XVIII. Il quadrilatero distinguesi in cinque specie, ciò sono il *parallelogrammo*, il *rettangolo*, la *losanga* o *rombo*, il *quadrato*, e il *trapezio*. Il parallelogrammo è quel quadrilatero che ha i lati opposti paralleli (fig. 13); il rettangolo è quello che ha i suoi quattro angoli eguali senza avere tutti i suoi lati eguali (fig. 12); e in questo caso, come sarà dimostrato in appresso, ciascun angolo è retto, e a ciò, come si vede, corrisponde il nome di questo quadrilatero; la losanga o il rombo è quello che ha tutti i suoi lati eguali, senza avere tutti gli angoli eguali (fig. 14); il quadrato è quello che ha insieme e gli angoli uguali e i lati uguali (fig. 11); finalmente il trapezio è quello che ha due soli lati opposti paralleli (fig. 15).

Si vedrà in seguito che il rettangolo, la losanga, e il quadrato sono tanti parallelogrammi, cioè hanno i lati opposti paralleli. Sicchè le proprietà che si dimostreranno del parallelogrammo, ch'è il genero, converranno altresì alle sue tre specie, cioè al rettangolo ch'è un parallelogrammo che ha tutti i suoi angoli uguali; al rombo ch'è un parallelogrammo che ha tutti i suoi lati uguali, ed al quadrato ch'è un parallelogrammo che ha i lati eguali e gli angoli eguali.

Il quadrato dunque è il più particolare di questi quattro quadrilateri, perchè è rettangolo e losanga insieme. Laonde le proprietà del rettangolo e della losanga apparterranno anche al quadrato.

Allorchè il parallelogrammo si vuol prendere nel senso particolare che abbia solamente i lati opposti paralleli, senza che nè tutti gli angoli nè tutti i lati siano uguali, lo si potrà distinguero col nome di *romboide*.

Ogni altro quadrilatero che non abbia nessuna delle condizioni dei cinque suddetti, siccome non ci presenta una forma notevole, e non ha nemmeno importanti proprietà, come si dimostrerà che l' hanno quei cinque, non prende niun nome particolare per ciascun cangiamento di forma cho può subire; perchè questo cangiamento avviene arbitrariamente, e non con date leggi o condizioni. Questi tali quadrilateri si potrebbero solo chiamare col nome comune di *trapezoidi*.

XIX. Degli altri poligoni non si distinguono, come del triangolo e del quadrilatero, differenti specie; ma solo si fanno le seguenti distinzioni comuni a tutti. Un poligono chiamasi *equilatero* quando ha tutti i suoi lati eguali; ed *equiangolo* quando ha tutti i suoi angoli eguali. Si concepisce bene che un poligono possa essere equilatero senza essere equiangolo, e viceversa; se ne deve però eccettuare il triangolo, il quale, come si dimostrerà, se è equilatero è pure di necessità equiangolo, o se è equiangolo è per una conseguenza equilatero. Qui cade in acconcio di prevenire i nostri lettori di una osservazione che essi avranno spessissimo occasione di fare in appresso, cioè che il triangolo dall'essere il più semplice poligono, hà molte peculiari proprietà che non convengono agli altri.

Allorchè un poligono è in pari tempo equiangolo ed equilatero dicesi *regolare;* perchè esso infatti ci presenta allora la forma più regolare e simmetrica che possa avere. Così, per esempio, il quadrato è il quadrilatero regolare, perchè ha i lati eguali e gli angoli eguali; e si vede che il quadrato ha la forma più acconcia che possa avere un quadrilatero.

XX. In un poligono si chiama *diagonale* quella linea retta che congiunge i vertici di due angoli opposti, ovvero non adiacenti.

XXI. Due poligoni si dicono *equilateri fra loro* quando hanno i loro lati rispettivamente eguali e disposti collo stesso ordine, cioè quando percorrendo i loro perimetri per il medesimo verso, il primo lato dell'uno è eguale al primo dell'altro, il secondo al secondo, il terzo al terzo, e così di seguito per quanti siano i lati de' due poligoni; onde si vede anche che i due poligoni debbono essere del medesimo numero di lati. È facile ora comprendere che s'intenda per due poligoni *equiangoli fra loro*. È poi quasi superfluo lo aggiungere che nel primo caso e nel secondo non s'include che ciascuno dei due poligoni sia equilatero o equiangolo.

Nell'un caso e nell'altro i lati eguali o gli angoli eguali chiamansi lati o angoli *omologhi;* che suona appunto in greco *corrispondenti.*

È necessario che i principianti menino bene a memoria tutte queste definizioni, perchè essi porteranno così in appresso idee chiare e distinte di quelle cose onde si verrà discorrendo; ed è però ch'elle sono state qui esposte nel modo più succinto che si poteva. Chi poi voglia meditarle più addentro legga le note ad esse corrispondenti.

Spiegazione di alcuni vocaboli e di alcuni segni di cui si farà uso in appresso.

Assioma è una verità evidente da per sè.

Teorema è una verità che diviene evidente per mezzo di un ragionamento che dicesi *dimostrazione*.

Problema è una quistione proposta, che richiede una soluzione.

Lemma è una verità premessa come di agevolazione ed aiuto alla dimostrazione di un teorema o alla soluzione di un problema. Veramente tutte le verità geometriche possono considerarsi come tanti lemmi le une delle altre; perchè appunto l' una serve e si fa, come dire, scala per giungere all'altra; ma noi daremo specialmente questo nome a quelle verità che a nulla servirebbero per sè medesime, e delle quali in tanto si fa parola, in quanto che menano alla dimostrazione di teoremi o alla soluzione di problemi importanti.

Il nome di *proposizione* viene dato indifferentemente così ai teoremi come ai problemi ed ai lemmi.

Scolio è un'osservazione che si fa sopra una o più proposizioni antecedenti, perchè se ne avverta il legame, la utilità, la restrizione, l' estensione, e simili

Ipotesi è una supposizione fatta o nell'enunciato di una proposizione o nel corso di una dimostrazione.

Tesi è la verità posta dall'ipotesi, e che la dimostrazione svolge e conchiude dalla stessa.

Una proposizione si dice *inversa* o *reciproca* di un'altra quando la sua ipotesi è tesi di quella, e la tesi ipotesi [1].

[1] È noto che non di tutte le proposizioni le reciproche sono vere. La ragione è che talune volte la conseguenza che si deduce da una ipotesi non conviene ad essa ipotesi solamente, ma ad un numero di casi più generale; allora è chiaro che la reciproca della proposizione non è vera. Quando poi nell'ipotesi sono compresi tutti i casi a cui appartiene la conseguenza, la reciproca è vera.

Il segno $=$ è il segno dell'eguaglianza; così l'espressione $A=B$ significa che A è uguale a B.

Per indicare che due quantità sono disuguali vi si frappone il segno $>$ rivolgendo l'apertura dell'angolo verso la quantità maggiore; così $A>B$ esprime che A è maggiore di B, ed $A<B$ che A è minore di B.

L'addizione s'indica col segno $+$ che si pronunzia *più*; la sottrazione col segno $-$, che si pronunzia *meno*; sicchè $A+B$ rappresenta la somma delle due quantità A e B; $A-B$ la loro differenza. Parimente $A-B+C$, o $A+C-B$ significa che devesi aggiungere A a C, e togliere B della loro somma.

Il segno $\times$ che pronunziasi *moltiplicato per* indica la moltiplicazione; così $A\times B$ è l'indicazione del prodotto di A moltiplicata per B. Anco invece di questo segno si suol far uso di un punto che si pone tra i due fattori; così $A.B$ è lo stesso che $A\times B$.

L'espressione $A\times(B+C-D)$ rappresenta il prodotto di A per la quantità $B+C-D$. Similmente, volendosi indicare il prodotto di $A+B$ per $A-B+C$, si scriverebbe $(A+B)\times(A-B+C)$; in generale tutto ciò che è compreso fra due parentesi deve considerarsi come una sola quantità.

Il quoziente di A divisa per B s'indica così: $\frac{A}{B}$; o pure in quest'altro modo: $A : B$. Parimente $\frac{A+B-C}{D+E}$ esprime il quoziente della quantità $A+B-C$ divisa per l'altra $D+E$; lo stesso indicherebbesi scrivendo $(A+B-C) : (D+E)$.

Un numero posto innanzi ad una quantità qualunque, come una linea, una superficie, un solido, un angolo, serve di moltiplicatore a questa quantità, volendo esprimere, per esempio, che la linea retta AB è presa tre volte, si scrive $3AB$; per dinotare la metà dell'angolo A si scrive $\frac{1}{2}A$.

Il quadrato di una linea retta AB s'indica con $\overline{AB}^2$; il suo cubo con $\overline{AB}^3$. Si spiegherà poi a suo luogo che s'intenda per il quadrato, e che per il cubo di una linea retta.

Il segno $\sqrt{\ }$ indica una radice quadrata da estrarsi; così $\sqrt{2}$ dinota la radice quadrata di 2; $\sqrt{A\times B}$ quella del prodotto $A\times B$, ovvero la media proporzionale tra A e B.

Allorchè si parla di una linea retta, o se ne considera la posizione rispetto ad un'altra, o la grandezza; nel primo caso noi nomineremo la retta nominandone due punti qualunque A e B; come vedesi nella figura 19 e diremo la linea retta AB; nel secondo nomineremo proprio le sue estremità A e B, che per più chiarezza marcheremo con due tratti, come si vede nella figura 77, e diremo la linea retta A'E'.

Una linea curva si nomina con tre lettere, due che indicano i suoi estremi e l'altra, che si pone in mezzo, un altro punto qualunque; così diremo la linea curva AEB. Una linea spezzata si nomina col nominare le estremità di tutte le linee rette che la compongono; così diremo la linea spezzata ACDB (fig. 1).

Quando in un punto non s'incontrino che due solo linee rette, cioè non siavi a quel punto che un solo angolo, nomineremo quest'angolo, nominandone il solo vertice; così (fig. 2) diremo l'angolo A; ma quando ad un punto vi siano differenti angoli, nascendo perplessità col nominare solamente questo punto, perchè non si determina così di qual angolo si parla, noi nomineremo l'angolo con tre lettere, mettendo sempre quella del vertice in mezzo. Così diremo l'angolo ACD (fig. 17).

Per nominare un poligono nomineremo successivamente i vertici di tutti i suoi angoli; così diremo il poligono ABCDEFG (fig. 41).

Si concepisce facilmente che le linee, le superficie, i corpi e gli angoli possono essere espressi in numeri, o esattamente o per approssimazione, paragonando ciascuna di queste quantità ad un'altra dello stesso genere scelta e stabilita innanzi come termine di paragone di tutte le altre, ovvero, come chiamasi, per unità; dunque è chiaro che le cose dette nell'Aritmetica circa i numeri in astratto si potranno applicare medesimamente ai numeri concreti i quali esprimono o linee, o superficie, o corpi, o angoli. Ora noi supporremo che il nostro lettore non entri nello studio della Geometria ignudo affatto di cognizioni aritmetiche; e faremo spesse volte uso di queste per le dimostrazioni di vari teoremi; imperocchè queste dimostrazioni saranno così di gran lunga più semplici di quelle onde eran costretti di servirsi gli antichi, i quali ponevano un irragionevole divorzio tra l'Aritmetica e la Geometria.

La teorica delle proporzioni ci sarà di un uso frequentissimo; epperò fia bene di ricordare qui alcune cose che varranno a fissare il vero senso di alcune proposizioni e a dissipare ogni oscurità e negli ennnciati e nelle dimostrazioni loro.

Se si voglia esprimere che le quattro rette A, B, C, D sono proporzionali si scriverà A : B :: C : D; e si avrà $A \times D = B \times C$; cioè il prodotto dei due numeri ch' esprimono la grandezza delle due rette A e D paragonate all'unità lineare, sarà lo stesso che il prodotto de' due numeri ch' esprimono la grandezza delle due rette B e C paragonate alla medesima unità lineare.

Infatti questa verità, che in una proporzione il prodotto de' termini estremi è uguale a quello dei termini medi, essendosi in aritmetica dimostrata vera pei numeri, non si potrà negare anche per le linee rette le quali, come abbiam veduto, possono rappresentarsi in numeri.

Ancora dobbiamo ricordarci che i termini di una stessa ragione debbono essere omogenei; e che in una proporzione i termini di una ragione possono essere eterogenei da quelli dell'altra. Noi scriveremo alcuna volta innanzi all'antecedente di una ragione la parola ch' esprime la natura di esso termine; allora ci dispenseremo di scrivere questa parola anche innanzi al conseguente, perch' esso non potrebbe essere di differente natura; così scriveremo: *superficie* A : B :: *retta* C : D. In tali proporzioni potremo bensì fare l'*invertendo*, il *componendo*, e il *dividendo*, ma il *permutando* non mai; perchè consistendo quest' ultimo nel paragonare gli antecedenti fra loro e i conseguenti fra loro, noi verremmo così a paragonare due quantità eterogenee, il che non può farsi. E in queste proporzioni si concepisce facilmente come anche il prodotto dei termini estremi è uguale a quello dei medi; imperocchè i termini di queste proporzioni non cessano di essere dei numeri, che ponno considerarsi come astratti.

In ultimo avvertiremo che parecchie proposizioni sono fondate sopra alcune regole dell'Algebra che sono le primitive e più semplici, e che derivando immediatamente dagli assiomi, possono anche supporsi dimostrate nella stessa aritmetica; ed ecco quali sono. Se abbiasi $A = B + C$ e si moltiplichi ciascun membro dell'eguaglianza per una stessa quantità M, se ne conchiude $A \times M = B$

$\times M + C \times M$. Se $A = B + C$ e $D = E - C$, sommando primo membro con primo membro, e secondo con secondo, si cancellerà $+C$ e $-C$ che si distruggono, e se ne dedurrà $A + D = B + E$.

Noi degli assiomi, per la estrema loro chiarezza, faremo sempre uso tacitamente, cioè senza citarli. Quando poi nel corso di una dimostrazione ci serviremo di una proposizione dimostrata innanzi, indicheremo sempre il libro ov' ella ritrovasi ed il suo numero.

ASSIOMI.

Gli assiomi propri della Geometria sono i seguenti:

I. Due quantità uguali ad una terza sono ugnali fra loro.

II. Da un punto ad nn altro non si può tirare che una sola linea retta. In altri termini, due linee rette non chiudono spazio.

III. Le quantità che combaciano sono uguali.

Il combaciamento o la coincidenza non può aver luogo che tra le parti dell'estensione, cioè tra linea e linea, tra snperficie e superficie, tra corpo e corpo, tra angolo ed angolo. Si dice che queste grandezze cambaciano, qnando tutti i punti dell'una si adattano su tutti i pnnti corrispondenti dell'altra; ed occupano perciò lo stesso luogo e sono identiche. Questa è l'idea dell'uguaglianza tra le parti dell'estensione.

Quando poi nella Geometria non si considerano solo come quantità continue le parti dell'estensione, ma si aggiunge l'idea di varie parti distinte, allora si fa uso eziandio degli assiomi che seguono i quali sono propri dell'Aritmetica.

I. Il tutto è maggiore di ciascuna sua parte.

II. Il tntto è uguale alla somma delle parti nelle quali è stato diviso.

III. Se a quantità uguali si aggiungano altre quantità uguali, le somme saranno uguali.

IV. Se da quantità uguali si tolgano altre quantità uguali i residui saranno uguali.

V. Se a quantità disuguali si aggiungano quantità uguali, le somme saranno uguali.

VI. Se da quantità disuguali si tolgano quantità uguali, i residui saranno disuguali.

VII. I doppi, tripli, quadrupli ec. di cose ugnali sono uguali, e per conseguenza anche le metà, terze parti, quarte parti ec. di cose nguali sono uguali.

VIII. Ogni quantità si può immaginare divisa in un qualunque numero di parti uguali.

PROPOSIZIONE PRIMA. — *TEOREMA.*

Ad una medesima linea retta e in un medesimo punto in essa non vi è che una sola perpendicolare.

Imperciocchè, se ciò mi si nieghi, siano perpendicolari alla medesima retta AB (fig. 16), e nel medesimo punto C in essa le dne linee rette CD e CK. Essendo così CD perpendicolare ad AB, sarà, per la definizione XII, l'angolo ACD uguale al suo adiacente DCB. Ma l'angolo ACK come tutto è maggiore della sua parte ACD, e l'angolo KCB come parte è minore del tutto DCB, ovvero di ACD ch'è ugnale a DCB; dunqne dei due angoli ACK e KCB, il primo è maggiore e il secondo è minore dello stesso angolo ACD; epperò sono disuguali fra loro. Or questo è contrario alla supposizione fatta che la retta CK era perpendicolare ad AB, cioè che l'angolo ACK era ugnale all' angolo KCB; è dunque vero che ad una medesima linea retta e ad un medesimo pnnto in essa non vi è che una sola perpendicolare, ciò che bisognava dimostrare.

Corollario. Gli angoli retti sono tutti uguali fra loro.

Sia la linea retta CD (fig. 16) perpendicolare all'altra AB, e GH ad EF io dico che l'angolo ACD è uguale all'angolo EGH.

S'imaginino prese le qnattro distanze uguali CA, CB, GE, GF; è evidente che così tutta la distanza AB sarà ugnale a tutta EF; e si potrà situare AB sopra EF, in modo che il punto A cada in E, e il punto B in F; queste rette così situate combaceranno intieramente e non formeranno che nna sola e medesima linea retta; perchè altrimenti da un pnnto ad un altro vi sarebbero due linee rette, il che è impossibile; dunque il punto C medio di AB cadrà sul punto G medio di EF. Situata così AB sopra EF, ed i punti A,C,B, sui punti E,G,F, la linea retta CD dovrà cadere ne-

cessariamente su GH, altrimenti nel medesimo punto G vi sarebbero due perpendicolari alla stessa retta EF, il che, per quello che si è dimostrato innanzi, è assurdo. Così dunque l'angolo ACD combacia con l' altro EGH, perchè il vertice C cade in G, e il lato CA sopra GE, e l'altro lato CD su GH; e quindi questi angoli sono uguali fra loro.

Adunque rimane dimostrato che gli angoli retti sono tutti uguali fra loro.

PROPOSIZIONE II. — *TEOREMA.*

Allorchè una linea retta ne incontra un'altra, la somma degli angoli adiacenti che fa con essa, è uguale a due angoli retti.

Sia la retta CD (fig. 17) che incontri l'altra AB nel punto C; io dico che la somma degli angoli adiacenti ACD, DCB è uguale a due angoli retti.

In fatti si concepisca tirata dal punto C la retta CE perpendicolare ad AB. L'angolo ACD è la somma dei due ACE, ECD; si aggiunga di comune tanto al primo angolo quanto alla somma dei secondi che gli è uguale, lo stesso angolo DCB, sarà ACD+DCB =ACE+ECD+DCB; ora di questi tre il primo ACE è retto, gli altri due formano insieme manifestamente l'angolo retto ECB; dunque la somma de'tre angoli ACE, ECD, DCB è uguale a quella di due angoli retti. Essendo così uguale alla somma di questi tre angoli tanto la somma de'duo angoli adiacenti ACD, DCB quanto quella di due angoli retti, s'inferisce, come si volea appunto dimostrare, che la somma de'due angoli adiacenti ACD, DCB è uguale a quella di due angoli retti.

Epperò *allorchè una linea retta ne incontra un'altra* ec. (si ripeta sempre l'enunciato della proposizione).

Corollario I. Se una linea retta ne incontri un'altra, ed uno degli angoli adiacenti è retto, l'altro sarà parimente retto. Perciocchè se non fosse, la somma degli angoli adiacenti non sarebbe più uguale a due retti, il che, come si è dimostrato, è impossibile.

II. *Se una linea retta è perpendicolare ad un'altra, la seconda sarà scambievolmente perpendicolare alla prima.*

Sia la retta DE (fig. 18) perpendicolare all'altra AB; sarà reciprocamente AB perpendicolare a DE. Imperocchè essendo per ipotesi DE perpendicolare ad AB, saranno gli angoli ACD, DCB uguali fra loro ed entrambi retti; essendo dunque retto l'angolo ACD, sarà, pel corollario antecedente, anche retto il suo adiacente ACE; ma tutti gli angoli retti sono uguali fra loro; dunque ACD=ACE, e quindi AB è perpendicolare a DE.

III. *Se da un medesimo punto di una linea retta si tirino dalla stessa parte di questa retta, quante altre rette si vogliano, la somma di tutti gli angoli consecutivi sarà uguale a due angoli retti.*

Dal punto A (fig. 34) della retta BF si tirino dalla stessa parte quante rette si vogliano AC, AD, AE; io dico che la somma di tutti gli angoli consecutivi BAC, CAD, DAE, EAF è uguale sempre a due angoli retti. Di fatti la somma de'due angoli adiacenti BAE, EAF è uguale a due angoli retti (prop. 2); ma l'angolo BAE è uguale alla somma degli angoli BAC, CAD, DAE; sostituendo dunque ad esso questa somma, si avrà la somma di tutti gli angoli consecutivi BAC, CAD, DAE, EAF uguale a due angoli retti.

Scolio. Una linea retta non può incontrare un'altra che perpendicolarmento od *obbliquamente*. Se la retta CE (fig. 17) incontri AB perpendicolarmente, ciascuno degli angoli ACE, ECB è retto, epperò la loro somma è uguale a due retti; se la retta CD incontri AB obbliquamente, tirata dal punto C la perpendicolare CE alla AB, l'eccesso dell'angolo ottuso ACD sul retto ACE sarà l'angolo ECD, e il difetto dell'acuto DCB dal retto ECB sarà pure ECD; adunque compensando il difetto dell'acuto dal retto coll'eccesso dell' ottuso sul retto, la somma degli angoli adiacenti ACD, DCB, che l'obbliqua CD fa colla retta AB, è puro uguale a due retti. E così rimane dimostrata in un modo più sensibile la proposizione II.

PROPOSIZIONE III. — *TEOREMA.*

Reciprocamente se una linea retta ad un medesimo punto in essa fa con due altre rette non poste dalla medesima parte la somma degli angoli adiacenti uguali a due retti, queste due rette saranno per dritto.

Suppongasi che la retta CD (fig. 19.) al medesimo punto C in essa faccia con le altre due rette AC, CB non poste dalla medesima parte, la somma degli angoli adiacenti ACD, DCB uguale a due retti; dico essere la retta AC per dritto con CB.

In fatti se mi si nieghi che CB è il prolungamento di AC, sia CE questo prolungamento. Allora essendo retta la linea ACE, sarà la somma degli angoli adiacenti ACD, DCE uguale a due retti (prop. 2); ma, per ipotesi, anche la somma degli angoli ACD, DCB è uguale a due retti; dunque $ACD+DCE=ACD+DCB$; togliendo dall'una somma e dall'altra il comune angolo ACD, resterà $DCE=DCB$, il che è assurdo, perchè il primo angolo è tutto ed il secondo n'è parte. Questo assurdo è derivato dall'aver supposto che non era CB il prolungamento di AC; dunque CB è qnesto prolungamento.

Laonde *se una linea retta* ec.

PROPOSIZIONE IV. — *TEOREMA.*

Due linee rette che hanno due punti di comune coincidono l'una con l'altra in tutta la loro estensione e non formano che una sola e medesima linea retta.

Siano A e B (fig. 20.) due punti comuni a due linee rette; è chiaro che queste due linee rette dal punto A al punto B debbono combaciare intieramente e confondersi in una sola linea retta; ora io dico che anche fuori di qnesti punti, dappertutto, queste dne rette non ne formeranno che una sola.

Imperocchè supponiamo che le due rette combaciate alquanto

fuori di questi punti, comincino a separarsi dal punto C; l'una divenendo ACD, e l'altra ACE. S'immagini, tirata dal punto C la retta CF che faccia con AC l'angolo retto ACF. Essendo così ACD una linea retta, incontrata questa dalla CF, che per costruzione fa con essa l'angolo ACF retto, l'altro adiacente FCD è medesimamente retto (prop. 2, cor. 1); parimente essendo ACE una linea retta, e facendo con essa la CF l'angolo retto ACF, sarà l'adiacente FCE ancora retto; ma gli angoli retti sono tutti uguali fra loro; dunque FCD=FCE; cioè il tutto è uguale alla parte. Ciò è un assurdo, ed è derivato dall'aver supposto che le due rette che avevano di comune i due punti A e B, si separavano in un punto fuori di questi due; dunque queste due rette combaceranno in tutta la loro estensione e non formeranno che una sola e medesima linea retta.

Perciò *due linee rette che hanno due punti di comune* ec.

Corollario I. Risulta evidentemente da ciò *che due linee rette che s'intersegano hanno un sol punto di comune*, perocchè se avessero un comune segmento, coinciderebbero, e non sarebbero più due linee rette distinte.

II. Anche è facile inferire che *due punti dati di posizione sono necessari e sufficienti per determinare la posizione di una linea retta;* e che *un punto è dato di posizione, quando son date di posizione due rette in ciascuna delle quali dee esso ritrovarsi.*

Scolio. Un punto solo dato di posizione non determina il sito di una linea retta, perchè, com'è chiaro, da un punto si possono tirare infinite linee rette a tutti gl'infiniti punti dello spazio; e queste linee rette sono le infinite diverse *direzioni*, che ponno prendersi, movendo da esso punto nello spazio.

PROPOSIZIONE V. — *TEOREMA.*

Se due linee rette s'intersegano, gli angoli opposti ai vertici sono uguali fra loro.

S'interseghino nel punto C (fig. 21.) le due rette AB, DE; io dico che l'angolo ACE è uguale al suo opposto al vertice DCB, come pure ACD=ECB.

Infatti essendo la retta AB incontrata dall'altra CE, avremo la

somma degli angoli adiacenti ACE, ECB eguale a due retti (prop. 2); e similmente, essendo la retta DE incontrata dall' altra CB, sarà BCD+ECB uguale a due retti; dunque ACE+ECB=BCD+ECB; tolto dalla prima somma e dalla seconda il comune angolo ECB, rimarrà ACE=BCD, come si volea dimostrare. In simil modo si dimostrerebbe che ACD=ECB.

Dunque *se due linee rette s' intersegano* ec.

Corollario I. Deriva da ciò, *che quando due linee rette s'intersegano, i quattro angoli intorno al punto d' intersezione, sommati insieme, equivalgono a quattro angoli retti.*

II. In generale, *la somma di tutti gli angoli consecutivi formati attorno ad un punto su di un piano, da quante rette si vogliano che s' incontrino tutte in quel punto, è uguale a quattro angoli retti.*

È chiaro infatti che se dal punto C (fig. 22.) si tirino quante rette si vogliano CA, CB, CD, CE, CF, tutti gli angoli consecutivi ACB, BCD, DCE, ECF, FCA occupano precisamente quello stesso spazio che occuperebbero i quattro angoli retti formati da due linee rette che s' intersegano perpendicolarmente nel punto C; dunque la somma di tutti questi angoli consecutivi è uguale a quattro angoli retti.

Scolio. Se due angoli ACE, DCB opposti al vertice (fig. 21.) sono uguali, ed un lato AC è per dritto con un lato CB, l'altro lato EC sarà per dritto con l'altro CD. Poichè, essendo, per ipotesi, AB una linea retta, avremo ACE+ECB uguale a due retti; e sostituendo all' angolo ACE l'altro DCB, che per supposizione gli è uguale, sarà DCB+BCE uguale a due retti. Ma quando la somma degli angoli adiacenti è uguale a duo retti, le due rette stanno per dritto (prop. 3); dunque DC sta per dritto con CE, come si voleva dimostrare.

PROPOSIZIONE VI. — *TEOREMA.*

Due triangoli sono uguali quando hanno un angolo uguale ad un angolo, e i due lati che comprendono il primo angolo rispettivamente uguali ai due lati che comprendono il secondo.

Siano i due triangoli ABC, DEF, i quali abbiano (fig. 23.) l'angolo A uguale all' angolo D e i due lati AB, AC che comprendono il

primo angolo rispettivamente uguali ai due lati DE, DF che comprendono il secondo, cioè AB=DE ed AC=DF; io dico che il triangolo ABC è uguale all'altro DEF.

Immaginando infatti sovrapposto il triangolo ABC sopra il triangolo DEF, in modo che il punto A sia posto sul punto D, e il lato AB sul lato DE, ancora il punto B dovrà cadere sul punto E, per essersi supposto il lato AB uguale al lato DE; situatosi così il lato AB su DE, l'altro lato AC dovrà necessariamente adattarsi sull' altro DF, essendo, per ipotesi, l'angolo A uguale all' angolo D; e così anche il punto C cadrà sul punto F, per la supposta eguaglianza dei due lati AC e DF. Ora essendo caduto il punto B in E; ed il punto C in F, il terzo lato BC si adatterà sul terzo lato EF, perchè, altrimenti, vi sarebbero due rette distinte dal punto E al punto F, il che è impossibile. Combaciando adunque il lato AB col lato DE, AC con DF, e BC con EF, il triangolo ABC combacerà coll'altro DEF e gli sarà uguale.

Epperò *due triangoli sono uguali* ec.

Corollario. Dall'essere tre cose uguali in due triangoli, cioè l'angolo A=D, il lato AB=DE ed il lato AC=DF, si può conchiudere che le tre altre sono pure uguali, cioè il lato BC=EF, l'angolo B=E, e l'angolo C=F, pel dimostrato combaciamento di tutte queste parti. Dunque *allorchè due triangoli hanno due lati uguali a due lati ciascuno a ciascuno, e l'angolo formato dai primi uguale all'angolo formato dai secondi, sarà il terzo lato del primo uguale al terzo lato del secondo, e i due rimanenti angoli dell' uno rispettivamente uguali ai due rimanenti angoli dell' altro, e saranno uguali quelli che sono opposti ai lati uguali.*

Scolio. Dietro questa proposizione si vede che per determinare un triangolo basta dare un angolo e i due lati che lo comprendono.

PROPOSIZIONE VII. — *TEOREMA.*

Due triangoli sono uguali, quando hanno un lato uguale ad un lato e i due angoli adiacenti al primo lato rispettivamente uguali ai due angoli adiacenti al secondo.

Suppongasi che nei due triangoli ABC, DEF (fig. 25) sia il lato

BC uguale al lato EF, e gli angoli B e C adiacenti al primo lato BC rispettivamente uguali agli angoli E ed F adiacenti al secondo EF; dico essere il triangolo ABC uguale al triangolo DEF.

Perocchè, immaginando adattato il triangolo ABC, sull'altro DEF in modo che il punto B sia posto in E, e il lato BC sul lato EF, il punto C cadrà necessariamente sul punto F, per la supposta eguaglianza dei due lati BC, EF. Situato così il lato BC sul lato EF, il lato BA dovrà per conseguenza cadere sul lato ED, per essersi supposto l'angolo B uguale all'angolo E; quindi il punto A si troverà su qualche punto della retta ED. Similmente avendo supposto l'angolo C uguale all'angolo F, il lato CA si adatterà sul lato FD, ed il punto A si troverà su qualche punto della retta FD; dunque il punto A che si è dimostrato doversi trovare simultaneamente sulle due rette ED ed FD, cadrà sul punto D, unico punto d'intersezione di queste due rette. Combaciando dunque i tre lati BC, AB, AC rispettivamente coi tre EF, DE, DF, il triangolo ABC combacerà col triangolo DEF, e gli sarà uguale.

Laonde *due triangoli sono uguali* ec.

Corollario. Qui pure dall'essere tre cose uguali in due triangoli, cioè il lato $BC=EF$, l'angolo $B=E$, e l'angolo $C=F$, si può conchiudere che le altre tre cose sono uguali, cioè il lato $AB=DE$, $AC=DF$, e l'angolo $A=D$ pel dimostrato combaciamento di queste parti. Sicchè *quando due triangoli hanno un lato uguale ad un lato e gli angoli adiacenti al primo lato rispettivamente uguali agli angoli adiacenti al secondo, sarà il terzo angolo dell'un triangolo uguale al rimanente dell'altro, e i due rimanenti angoli dell'uno rispettivamente uguali ai due rimanenti angoli dell'altro, uguali quelli che sono opposti ad angoli uguali.*

Scolio. Adunque allorchè si dànno di un triangolo un lato e i due angoli adiacenti ad esso lato, questo triangolo è pienamente determinato.

PROPOSIZIONE VIII. — *TEOREMA.*

In ogni triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due.

Sia un triangolo ABC (fig. 23); dico che il lato BC è minore della

somma degli altri due AB, AC, e parimente che il lato $AB<AC+CB$, ed il lato $AC<AB+BC$.

Ed in vero la linea retta è la più corta di tutte quelle che possono tirarsi da un punto ad un altro; dunque dal punto B al punto C la retta BC è più corta che la spezzata $BA+AC$, come si volea dimostrare. Si vedrà con un ragionamento affatto simile che $AB<AC+CB$ ed $AC<AB+BC$.

Dunque *in ogni triangolo un lato qualunque* ec.

Corollario. In ogni triangolo un lato qualunque è maggiore della differenza degli altri due.

Supponiamo che il lato AB sia il maggiore dei tre. Se BC non è maggiore di $AB-AC$, dovrà essergli o uguale o minore; in questi due casi non si avrebbe più $AB<AC+BC$; dunque dev' essere $BC>AB-AC$. Così pure si proverà che $AB>BC-AC$, e che $AC>AB-BC$.

PROPOSIZIONE IX. — *TEOREMA.*

Se da un punto preso dentro di un triangolo si tirino alle estremità di un lato qualunque due linee rette, la somma di queste rette sarà minore della somma dei due rimanenti lati del triangolo.

Preso nel triangolo ABC (fig. 24.) un punto O ad arbitrio, si conducano da questo punto le due rette OB, OC all'estremità B e D di un lato qualunque BC; dico essere la somma delle due rette OB, OC minore della somma dei due rimanenti lati AB, AC.

Per dimostrarlo, si prolunghi la retta OB fino a che incontri il lato AC nel punto D. Nel triangolo ODC il lato OC è minore di $OD+DC$; aggiungendo di comune BO, si avrà $BO+OC<BO+OD+DC$, ovvero $BO+OC<BD+DC$. Parimente nel triangolo BAD si ha $BD<BA+AD$, ed aggiungendo di comune DC, sarà $BD+DC<BA+AD+DC$, o sia $BD+DC<BA+AC$ Ma si è or ora dimostrato $BO+OC<BD+DC$; sarà dunque a più forte ragione $BO+OC<BA+AC$; ciò che bisognava appunto dimostrare.

È dunque vero che *se da un punto* ec.

PROPOSIZIONE X. — *TEOREMA.*

Se due triangoli abbiano due lati rispettivamente uguali a due lati, e l'angolo compreso da'due lati del primo maggiore dell'angolo compreso dai due lati del secondo, sarà il terzo lato del primo triangolo maggiore del terzo lato del secondo.

Siano i due triangoli ABC, DEF (fig. 25.) i quali abbiano il lato AB=DE e il lato AC=DF, o nel medesimo tempo l'angolo BAC formato dai lati AB, AC maggiore dell'angolo EDF formato dai lati DE, DF; dico essere il terzo lato BC del primo triangolo maggiore del terzo lato EF del secondo.

S'intenda formato col vertice A e con il lato AC l'angolo GAC uguale all'angolo EDF, e preso AG=DE, si congiunga il punto G col punto C mediante la retta GC. I due triangoli AGC, DEF hanno l'angolo GAC per costruziono uguale all'angolo EDF e il lato AG uguale al lato DF; e per ipotesi il lato AC uguale al lato DF; dunque i due triangoli AGC, DEF sono fra loro uguali perchè hanno un angolo uguale ad un angolo e i due lati che comprendono il primo rispettivamente uguali ai due lati che comprendono il secondo (prop. 6.), per conseguenza, il terzo lato GC sarà uguale al terzo lato EF. Inoltre allo stesso lato DE è uguale AG per costruzione ed AB per ipotesi; dunque AG=AB. Premesso ciò, siccome l'angolo BAC si è supposto maggiore dell'angolo EDF, così è chiaro che AG deve cadere nell'angolo BAC; onde nel prendere AG uguale a DC, il punto G potrà cadere o fuori del triangolo ABC, o nel lato BC, o dentro del triangolo stesso, secondo la diversa forma de'triangoli.

1° *caso.* Cada il punto G fuori del triangolo ABC; In questo caso AG deve incontrare BC in un punto I, cioè debbono necessariamente aver luogo i due triangoli AIB, GIC. Ora nel triangolo AIB il lato AB è minore di AI+IB; similmente nel triangolo GIC si ha GC<GI+IC; dunque è chiaro che AB+GC<AI+IB+GI+IC, ovvero AB+GC<AG+BC, per essere AI+GI=AG ed IB+IC=BC; e tolta in questa disuguaglianza dalla prima somma AB e dalla seconda AG uguale ad AB, rimarrà GC<BC, ovvero EF<BC, per essersi dimostrata GC=EF.

2° *caso*. Quando il punto G (fig. 26) cade nel lato BC, GC diventa parte di BC, e quindi GC, ovvero la sua uguale EF è minore di BC.

3° *caso*. Finalmente se la forma de' due triangoli è tale che il punto G (fig. 27) cada dentro del triangolo ABC, allora essendo le due rette AG, GC condotte dal punto G, preso nel triangolo, agli estremi A e C del lato AC, sarà, pel teorema precedente, $AG + GC < AB + BC$; o togliendo dalla prima somma AG, e dall' altra la sua uguale AB, rimarrà $GC < BC$, ovvero $EF < BC$.

Dunque *se due triangoli* ec.

Scolio. Si vede chiaramente da questa proposizione che due lati non sono sufficienti per determinare un triangolo.

PROPOSIZIONE XI. — *TEOREMA*.

Reciprocamente se due triangoli abbiano due lati rispettivamente uguali a due lati, ed il terzo lato maggiore del terzo lato, sarà l'angolo formato dai due primi lati maggiore dell' angolo formato dai due secondi.

I due triangoli ABC, DEF (fig. 25) abbiano il lato $AB = DE$ e $AC = DF$, e, di più, il terzo lato BC maggiore del terzo lato EF; io dico che l' angolo BAC è maggiore dell' angolo EDF.

Perocchè se si nieghi ciò, l' angolo BAC o sarà uguale a EDF, o ne sarà minoro. Nel primo caso i due triangoli avrebbero l' angolo $BAC = EDF$ e i due lati AB, AC che comprendono il primo rispettivamente uguali, per ipotesi, ai due DE, DF che comprendono il secondo, epperò sarebbe il terzo lato AC uguale al terzo lato EF, il che non può essere, come contrario all' ipotesi; nel secondo caso i due triangoli avrebbero i due lati AB, AC rispettivamente uguali ai due DE, DF o l' angolo compreso dai due primi minore di quello compreso dai due secondi; sarebbe quindi, pel teorema antecedente, il terzo lato BC minore del terzo lato EF, il che anche si oppone alla supposizione; dunque l' angolo BAC è maggiore dell'angolo EDF, giacchè non può essergli nè uguale nè minore; ciò che bisognava dimostrare.

Per la qual cosa *se due triangoli* ec.

PROPOSIZIONE XII. — *TEOREMA.*

Due triangoli sono uguali quando hanno i loro tre lati rispettivamente uguali.

Siano i due triangoli ABC, DEF, (fig. 23) i quali abbiano il lato AB uguale al lato DE, il lato AC uguale al lato DF ed il lato BC uguale al lato EF; dico essere questi due triangoli uguali fra loro.

Basta dimostrare che l'angolo A è uguale all'angolo B; perchè allora i due triangoli avendo i due lati AB, AC rispettivamente uguali, per ipotesi, ai due DE, DF e l'angolo A formato dai due primi lati uguale all'angolo D formato dai due secondi, sarebbero uguali. Ora se nieghisi che l'angolo A sia uguale all'angolo D, dovrà esserne A o maggiore o minore. Se A fosse maggiore di D, essendo i due lati AB, BC rispettivamente uguali ai due DE, DF e l'angolo A formato da' primi due, maggiore dell'angolo D formato dai due secondi, sarebbe il terzo lato BC maggiore del terzo lato EF (prop. 10); se l'angolo A fosse minore di D, si vede similmente che dovrebbe essere BC minore di EF; ora BC non può essere nè maggiore nè minore di EF, perchè gli si è supposto uguale; dunque nè anche l'angolo A potrà essere maggiore nè minore di D; gli dovrà dunque essere uguale. Così i due triangoli ABC, DEF sono uguali, e quindi i due rimanenti angoli dell'uno saranno rispettivamente uguali ai due rimanenti dell'altro, cioè B = E, C = F.

Corollario. Dall'essere tre cose uguali in due triangoli, cioè il lato AB = DE, AC = DF, BC = EF, se ne può conchiudere che le altre tre cose sono medesimamente uguali, cioè l'angolo A = D, B = E, C = F. Dunque *quando due triangoli hanno i loro tre lati rispettivamente uguali, avranno pure i tre angoli rispettivamente uguali, e saranno uguali quelli che sono opposti ai lati uguali.*

Scolio I. Adunque con tre lati dati non si può avere che un sol triangolo, ch'è quanto dire tre lati sono sufficienti per determinare un triangolo.

II. Da questo teorema si può ricavare semplicissimamente la seguente proposizione, la cui dimostrazione trovasi assai più complicata in Euclide; e che ci servirà in appresso. Se si congiunga ciascuno de' due punti B, G (fig. 25), i quali stieno fuori della retta AC, con l'estremità di questa retta, io dico che non si potrà avere nel medesimo tempo AB = AG e BC = GC. Infatti, se così fosse, i due triangoli ABC ed AGC avrebbero i loro tre lati rispettivamente uguali senza che potessero combaciare; il che, come si è veduto, è assurdo La dimostrazione sarebbe la stessa se il vertice di uno de' due triangoli cadesse dentro dell'altro angolo, o su di un lato.

PROPOSIZIONE XIII. — *TEOREMA.*

In un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali.

Sia ABC (fig. 28) un triangolo isoscele, e siano AB, AC i suoi lati uguali; dico essere eziandio fra loro uguali gli angoli B e C che si oppongono a questi lati.

S'immagini congiunto il *vertice* A del triangolo col punto di mezzo D della *base* BC, mediante la retta AD. Nasceranno così i due triangoli ADB, ADC, i quali avranno i loro tre lati rispettivamente uguali, cioè AD di comune, AB = AC per ipotesi, e BD = DC per costruzione; dunque, in virtù del teorema precedente, l'angolo B è uguale all'angolo C; come si voleva dimostrare.

Onde in *un triangolo isoscele* ec.

Corollario. Quindi *il triangolo equilatero è eziandio equiangolo.* Perchè due qualunque de' suoi angoli essendo opposti a lati uguali sono uguali; epperò tutti e tre sono uguali fra loro. Questa verità era già stata da noi asserita nelle definizioni, in parlando dei poligoni equilateri ed equiangoli.

Scolio I. L'uguaglianza dei triangoli ADB, ADC prova nel tempo stesso che l'angolo DAB = DAC, e che l'angolo ADB = ADC; ma questi due ultimi sono adiacenti; essi sono dunque retti; *epperò la linea retta tirata dal vertice del triangolo isoscele al punto*

in mezzo della base, è perpendicolare a questa base e divide l' angolo al vertice in due parti uguali.

Questa retta dunque adempie nel medesimo tempo a quattro condizioni, cioè 1° passa pel vertice del triangolo; 2° pel punto medio della base; 3° divide l' angolo al vertice per metà; 4° è perpendicolare alla base. Ora siccome due condizioni solamente sono necessarie o sufficienti per determinare la posizione di una linea retta, così è chiaro che date due di queste quattro condizioni, le altre due debbono avverarsi. Così nell' ipotesi le due condizioni erano che la retta passava pel vertice e pel punto medio della base, e le altre due sonosi avverate, cioè ch' essa retta era perpendicolare a questa base e divideva l' angolo al vertice per metà. Lo stesso si avrà dando altre due condizioni; così è chiaro che *la perpendicolare elevata dal punto di mezzo della base di un triangolo isoscele a questa base, passa pel vertice del triangolo e divide l' angolo al vertice per metà;* che *la perpendicolare abbassata dal vertice di un triangolo isoscele sulla base, passa per il punto di mezzo di questa base e divide l' angolo al vertice per metà*, ec.

II. In un triangolo, che non sia isoscele, si prende indifferentemente per *base* un lato qualunque, ed allora il suo *vertice* è quello dell'angolo opposto. Nel triangolo isoscele si prende particolarmente per base il lato disuguale agli altri due; e così il vertice del triangolo è quello dell' angolo opposto.

III. Si può anche osservare che *in un triangolo isoscele, prolungati i lati uguali, gli angoli sotto la base sono anche uguali fra loro.*

PROPOSIZIONE XIV. — *TEOREMA.*

Reciprocamente se due angoli di un triangolo sono uguali, i lati opposti a questi angoli saranno uguali, e così il triangolo sarà isoscele.

Nel triangolo ABC (fig. 29) sia l' angolo ABC uguale all'angolo ACB; io dico che i lati AB, AC opposti a questi angoli sono uguali fra loro.

Imperocchè se questi due lati non sono fra loro uguali, sia AB il maggiore de' due. Si prenda su di AB una parte BD uguale ad AC, e si congiunga DC. Essendo così l'angolo DBC, per ipotesi, uguale ad ACB, il lato DB uguale al lato AC per costruzione, ed il lato BC comune, i due triangoli DBC, ACB, avendo un angolo uguale ad un angolo e i due lati che comprendono il primo rispettivamente uguali ai due lati che comprendono il secondo, sono uguali; cioè la parte uguale al tutto, il che è impossibile. Adunque i due lati AB, AC non possono essere disuguali, ma sono uguali.

Epperò se *due angoli di un triangolo* ec.

Corollario. Segue dal teorema dimostrato che *ogni triangolo equiangolo è altresì equilatero*; poichè trovandosi i lati a due a due opposti ad angoli uguali, a due a due debbono essere uguali, epperò tutti e tre uguali fra loro.

PROPOSIZIONE XV. — *TEOREMA.*

Di due lati di un triangolo il maggiore è quello ch' è opposto all'angolo maggiore; e reciprocamente di due angoli di un triangolo il maggiore è quello che si oppone al lato maggiore.

1.° Sia nel triangolo ABC (fig. 30) l'angolo ACB maggiore dell'angolo ABC; dico essere il lato AB opposto all'angolo ACB, maggiore del lato AC opposto all'angolo minore ABC.

Col vertice C e col lato CB s'immagini fatto l'angolo BCD uguale all'angolo ABC; così nel triangolo BDC essendo uguali fra loro, per costruzione, i due angoli BCD e DBC, saranno eziandio uguali, in virtù del teorema precedente, i due lati BD e DC opposti a questi angoli. Ora nel triangolo ADC si ha il lato AC minore di AD+DC; dunque sostituendo a DC il suo uguale DB, si avrà $AC<AD+DB$, ovvero $AC<AB$, come si voleva dimostrare.

2.° Passando alla reciproca, sia nello stesso triangolo ABC il lato AB maggiore del lato AC; dico essere l'angolo ACB opposto al lato AB maggiore dell'angolo ABC opposto al lato minore AC.

Infatti, negandosi che ACB sia maggiore di ABC, dovrebbe esserne o minore o uguale; se ACB fosse minore di ABC, sarebbe, per quello che si è or ora dimostrato, AB<AC; il che è contrario alla supposizione; se ACB fosse uguale ad ABC, sarebbe AB=AC (prop. 14); il che pure si oppone alla supposizione; bisogna dunque necessariamente che l'angolo ACB sia maggiore dell'altro ABC; ch'è quello che facea d'uopo dimostrare.

Sicchè di *due angoli di un triangolo* ec.

Corollario. Dunque in ogni triangolo scaleno al massimo lato è opposto il massimo angolo, al medio il medio, al minimo il minimo, e viceversa.

PROPOSIZIONE XVI. — *TEOREMA.*

Da un punto che stia fuori di una linea retta non si può abbassare a questa retta che una sola perpendicolare.

Imperocchè supponiamo che dal punto A (fig. 31) che stia fuori della retta DE si possano menare a questa retta due perpendicolari AB ed AC. Prolunghisi una di esse, per esempio AB, di una quantità BF uguale ad AB, e congiungasi il punto C col punto F, mediante la retta CF.

I due triangoli ACB, BCF hanno il lato AB uguale al lato BF, per costruzione, il lato CB di comune, e l'angolo ABC uguale all'angolo CBF, perchè sono, per supposizione, retti; dunque questi triangoli sono uguali (prop. 6), e quindi l'angolo ACB opposto al lato AB è uguale all'angolo BCF opposto al lato uguale BF; ma per ipotesi l'angolo ACB è retto, dunque anche il suo uguale BCF è retto. Ora siccome la retta CB al medesimo punto C in essa fa con le altre due AC, CF non posto dalla medesima parte la somma degli angoli adiacenti ACB, BCF uguale a due retti, s'inferisce che le due AC, CF sono per dritto (prop. 3). Ma così dal punto A al punto F si sarebbero condotte le due rette AF ed ACF, il che è assurdo; è dunque medesimamente assurdo che dal punto A si possa menare più di una perpendicolare alla retta DE; come si voleva appunto dimostrare.

Laonde *da un punto che stia fuori* ec.

Scolio. Qui il punto sta fuori della retta; se stesse sulla retta si è già dimostrato nella proposizione prima che da un punto preso su di una retta non si può elevare a questa retta che una sola perpendicolare.

Nell' un caso e nell' altro si vede che le due condizioni di passare per un punto ad essere perpendicolare ad una retta determinano la posizione di una linea retta. In generale si vedrà sempre che due condizioni sono necessarie e sufficienti per determinare la posizione di una linea retta.

PROPOSIZIONE XVII. — *TEOREMA.*

Se da un medesimo punto che stia fuori di una linea retta sia abbassata a questa retta la perpendicolare e differenti oblique a vari punti di essa retta;

1.° *La perpendicolare sarà più corta di ogni obbliqua.*

2.° *Due obblique che sieno poste da una parte e dall' altra della perpendicolare a uguali distanze da essa, saranno uguali.*

3.° *Di due obblique che distino disugualmente dalla perpendicolare la maggiore sarà quella che più se ne allontana.*

1.° Dal punto A (fig. 31) posto fuori della retta DE sieno abbassate su questa retta la perpendicolare AB e l' obbliqua qualunque AC; dico essere AB minore di AC.

Si prolunghi AB di una quantità BF uguale ad AB e si congiunga CF. Il triangolo ACB è uguale al triangolo BCF, poichè $AB=BF$ per costruzione, CB è comune, e l' angolo retto $CBA=CBF$; dunque il terzo lato AC è uguale al terzo lato CF (prop. 6). Ciò posto, nel triangolo ACF si ha $AF<AC+CF$; dunque AB ch'è manifestamente metà di AF, è minore di AC, ch' è metà di $AC+CF$; come si voleva dimostrare.

2.° Sieno ora le due obblique AC, ed AE poste dall' una parte e dall'altra della perpendicolare AB ugualmente distanti da essa, cioè sia $CB=BE$, io dico che queste due obblique sono fra loro uguali. Infatti i due triangoli ACB, ABE sono uguali, perchè

hanno AB di comune, $CB=BE$ per ipotesi, e l'angolo $ABC=ABE$, come retti; dunque il terzo lato AC è uguale al terzo lato AE (prop. 6), cioè le due obblique sono uguali fra loro.

3.° In ultimo delle due obblique AC, AD la prima disti dalla perpendicolare più che la seconda, cioè sia $DB>CB$; dico che AD è maggiore di AC.

Si prolunghi AB di una quantità AF uguale ad AB, e si congiunga CF e DF. Si dimostrerà come innanzi, che il triangolo $ACB=BCF$, e parimente il triangolo $ADB=BDF$; dunque il terzo lato $AC=CF$, e il terzo lato $AD=DF$. Ora essendo dal punto C dentro del triangolo ADF condotte all' estremità del lato AF le due rette AC, CF, si ha $AC+CF<AD+DF$; (prop. 9); dunque AC metà di $AC+CF$ sarà minore di AD ch'è metà di $AD+DF$; cioè l' obbliqua ch'è più vicina alla perpendicolare è minore di quella che n' è più lontana; come si volea appunto dimostrare.

Qui le obblique sonosi supposte essere dalla stessa parte della perpendicolare; se stessero da diverse parti come AD ed AE, si prenderebbe $CB=BE$, e congiunta AC, sarebbe $AC=AE$, perchè distano ugualmente dal piede della perpendicolare; si dimostrerebbe, come si è fatto ora, $AC<AD$; e quindi sarebbe anche $AE<AD$.

Dunque è vero che *se da un punto* ec.

Corollario I. La perpendicolare misura la vera distanza di un punto da una linea retta; perocchè è più corta di ogni obbliqua, epperò unica.

II. Da un medesimo punto non si possono tirare ad una medesima linea retta più di due rette uguali; perchè tiratone prima due uguali, cioè ad ugual distanza dalla perpendicolare da una parte e dall' altra, ogni altra obbliqua differente da queste due dovrebbe essere necessariamente o più vicina o più lontana dalla perpendicolare che queste due, e quindi dovrebbe essere minore o maggiore di esse.

Scolio. Questa proposizione include manifestamente la reciproca: 1.° *La più corta di tutte le rette che si tirano da un punto su di una retta è perpendicolare a questa retta;* 2.° *due obblique uguali distano ugualmente dalla perpendicolare;* 3.° *di due obblique disuguali la maggiore è più lontana dalla perpendicolare che la minore.*

PROPOSIZIONE XVIII. — *TEOREMA.*

Se dal punto di mezzo di una linea retta sia elevata ad essa la perpendicolare; 1° ciascun punto di questa perpendicolare sarà ugualmente distante dalle estremità della retta; 2° ogni punto posto fuori della perpendicolare sarà disugualmente distante da esse estremità.

Dal punto di mezzo C (fig. 32) della linea retta AB si supponga elevata a questa retta la perpendicolaro CF; io dico 1° che ogni punto di questa perpendicolare disterà ugualmente dalle due estremità A e B; 2° che ogni punto che stia fuori della perpendicolare, disterà disugualmente dalle dette estremità.

1.° Infatti sia D un punto qualunque della perpendicolare CF; si congiunga questo punto con le due estremità A e B mediante le rette AD, DB. Così, essendo per supposizione, AC = CB; le due obblique AD, DB distano ugualmente dalla perpendicolare, e quindi pel teorema precedente, sono fra loro uguali; come si voleva dimostrare. Così pure si avrà AF = FB, AE = EB, ec.

2.° Sia ora un punto qualunque I fuori della perpendicolaro; si congiunga questo punto con le estremità A e B mediante le rette AI, IB; è chiaro che una di queste rette dovrà incontrare la perpendicolare CF in un punto D; si congiunga DB. Appartenendo il punto D alla perpendicolaro CF, si avrà, per quello che s'è or ora dimostrato, AD = DB; aggiungendo di comune DI, sarà AD + DI = DB + DI; ma nel triangolo IDB si ha DB + DI > IB, dunque sarà pure AD + DI > IB, ovvero AI > IB; cioè il punto I è disugualmente distante dalle due estremità A e B; come bisognava dimostrare.

Dunque *se dal punto di mezzo* ec.

Corollario. Se si abbiano due punti de' quali ciascuno sia ugualmente distante dalle estremità di una linea retta, la retta che li unisce deve incontrare perpendicolarmente quella retta e dividerla per metà. Infatti è chiaro dalla proposizione dimostrata che ciascuno di questi due punti deve trovarsi sulla perpendico-

lare elevata dal punto di mezzo di quella retta; ma tra due punti non passa che una sola linea retta; dunque la retta che unisce quei due punti è appunto la perpendicolare a quella retta nel suo punto di mezzo.

Scolio. Si è veduto che AD = DB ed AF = FB; ora, essendo l'obbliqua AF maggiore dell'altra AD, che si avvicina più alla perpendicolare CA, si deduce che a misura che un punto preso nella perpendicolare si scosta più dal punto C, tanto più le due distanze uguali di questo punto dalle estremità A e B crescono. Giova di più osservare che se si abbiano due punti A e B in un piano, e si prenda in questo piano una serie di punti C, D, E, F ec. de' quali ciascuno sia equidistante dai punti A e B, tutti questi punti saranno in una medesima linea retta, perpendicolare alla retta che unisce i due punti A e B. Di qui la maniera di condurre da un punto ad un altro una linea retta col solo compasso, senza bisogno di riga. Volendo, per esempio, menare una retta tra due punti dati A e B, si segneranno con una stessa apertura di compasso due punti M ed N ugualmente distanti dai punti A e B, e poi con diverse aperture di compasso si segnerà una serie di punti C, D, E, F, G ec. vicini fra loro il più che si possa, e de' quali ciascuno sia equidistante da' due punti M ed N; la serie di questi punti sarà il sentiero rettilineo da A a B. Queste considerazioni dànno un' idea più precisa della linea retta e ne stabiliscono quasi il carattere geometrico.

PROPOSIZIONE XIX. — *TEOREMA*.

Se si prolunghi un lato qualunque di un triangolo, l' angolo esterno che ne nasce è maggiore di ciascuno degl' interni ed opposti.

Del triangolo ABC (fig. 35) sia prolungato un lato qualunque BC; io dico che l'angolo esterno ACD è maggiore sì dell'angolo BAC e sì dell' altro ABC, che sono i suoi interni ed opposti.

S' immagini diviso AC per metà nel punto F, e congiunto AF, s' intenda prolungata questa retta di una quantità FE uguale a

BF, e si congiunga EC. Così nasceranno i due triangoli ABF, FCE; i quali, avendo l'angolo AFB uguale all'angolo EFC, perchè opposti al vertice, e per costruzione AF = FC e BF = FE, sono uguali (prop. 6); e quindi l'angolo BAF opposto al lato BF, è uguale all'angolo FCE opposto al lato uguale FE; ma ACD è maggiore della sua parte ACE; dunque sarà pure ACD>BAC.

Prolungando poi il lato AC verso G, e facendo la medesima costruzione sul lato BC, si proverà similmente che BCG > ABC; ma ACG è uguale ad ACD, come opposti al vertice, dunque si avrà pure BCD>ABC; sicchè l'angolo esterno ACD è maggiore sì dell'uno e sì dell'altro interno ed opposto BAC, ABC; come bisognava dimostrare.

Epperò è vero che *se si prolunghi un lato ec.*

Scolio. Si è detto nella proposizione IX che se da un punto O (fig. 24) preso dentro di un triangolo ABC, si conducano due rette OB, OC alle estremità di un lato BC, sarà BO + OC > BA + AC; ora qui si può anche osservare che l'angolo BOC formato dalle due rette BO, OC, è maggiore dell'angolo BAC formato dai due rimanenti lati del triangolo. Infatti del triangolo ODC l'angolo esterno BOC è maggiore dell'interno ed opposto ODC; ma del triangolo BAC l'angolo esterno BDC è maggiore dell'interno ed opposto BAC; dunque con più forte ragione sarà BOC>BAC.

PROPOSIZIONE XX.— *TEOREMA*.

Allorchè due linee rette situate in un medesimo piano, intersegate da una terza, facciano 1.° gli angoli alterni uguali fra loro; 2.° o l'esterno uguale all'interno ed opposto dalla medesima parte; 3.° o la somma degli angoli interni da una stessa parte uguali a due retti; queste rette sono parallele.

1.° Supponiamo che le due rette AB, e CD (fig. 36), situate in un medesimo piano vengano intersegate dalla terza EF in modo che l'angolo AGO sia uguale al suo alterno GOD; dico che queste due rette AB, CD sono parallele.

Infatti, se ciò si nieghi, queste rette dovranno dall' una parte o dall' altra incontrarsi in un punto M. Ma così nel triangolo GOM l' angolo esterno AGO sarebbe, per la proposizione antecedente, maggiore dell' interno ed opposto GOD; questo è contrario alla supposizione; dunque le rette AB, CD non potranno incontrarsi, cioè sono parallele.

2.° Sia ora l'angolo esterno EGB uguale all' interno ed opposto dalla medesima parte GOD; dico pure che le due rette AB, CD sono parallele.

Imperocchè siccome EGB = GOD, per ipotesi, ed EGB = AGO, perchè opposti al vertice, sarà AGO=GOD, cioè gli alterni uguali fra loro; dunque, per quello che si è or ora dimostrato, AB è parallela a CD.

3.° In ultimo sia la somma degli angoli interni dalla stessa parte BGO e GOD uguale a due retti; dico anche che AB è parallela a CD.

Perchè, essendo, per ipotesi BGO+GOD uguale a due retti; ed anche la somma degli angoli adiacenti AGO + BGO uguale a due retti, sarà BGO + GOD = AGO + BGO; e tolto di comune BGO, rimarrà AGO=GOD; cioè gli alterni uguali fra loro; dunque AB è parallela a CD.

Laonde *se due rette situate in medesimo piano* ec.

Corollario. Due linee rette EF, CD (fig. 39) *perpendicolari ad una medesima RP sono parallele fra loro;* perchè allora la somma degli angoli interni dalla stessa parte ERQ, RQC è uguale a due retti.

Ma ciò potrebbesi ancora dimostrare indipendentemente in questo modo. Se le rette EF, CD non fossero parallele dovrebbero incontrarsi in un punto; ed allora da questo punto vi sarebbero due perpendicolari sulla medesima retta RP; il che è assurdo (prop. 16).

Scolio I. Sarebbero anche parallele le due rette se si supponessero uguali gli angoli COF, EGB (fig. 36), i quali si chiamano *alterni-esterni;* perchè essendo COF=GOD, come opposti al vertice, ciò sarebbe lo stesso che supporre uguali, come sopra, EGB, GOD. Anche poteva supporsi la somma degli angoli esterni dalla stessa parte EGB, FOD uguale a due retti, perchè ciò vale lo stesso che supporre, come sopra, AGO+GOC = 2 retti.

II. Per ben comprendere la proposizione che seguirà si ponga ben mente alla osservazione che ora faremo. La quale è che quando una retta GB (fig.36), fa con un'altra EF due angoli BGO, EGB, se questi angoli al medesimo punto G cangiano, la retta GB, cangiando posizione, ha dovuto rotare intorno al punto G. Da ciò è chiaro che perchè una retta GB si muova lateralmente su di un piano in modo che resti sempre parallela a sè stessa, è sufficiente [1] che intersegata da un'altra EF, il punto d'intersezione G scorra su quest'altra, e che la retta GB non roti mai intorno ad esso punto. In fatti, facendo così la retta GB sempre lo stesso angolo con EF, se noi la consideriamo in due punti qualunque G ed O, abbiamo l'angolo esterno EGB uguale all'interno ed opposto GOD; dunque, per quello che si è or ora dimostrato, GB è parallela ad OD; cioè GB si è mantenuta parallela a sè stessa.

Se per lo contrario al punto O si trovasse un angolo maggiore o minore di EGB, se ne inferirebbe che nel cammino del punto G sulla retta EF la retta GB ha rotato intorno a questo punto. Ora nella proposizione che seguirà noi dimostreremo che in questo caso della ineguaglianza dei due angoli EGB, GOD, le rette GB ed OD non sono parallele.

Faremo in ultimo una seconda osservazione; ed è che qualora due rette AB, CD (fig. 37) siano intersegate da una terza EF in modo che l'angolo esterno EIB sia uguale all'interno ed opposto IOD, nel qual caso, come si è veduto, le rette sono parallele, se la segante EF roti intorno al punto I, cangiando così per conseguenza gli angoli EIB, EIA, cangeranno altresì gli angoli IOD, IOC ch'essa segante EF fa con l'altra retta CD. Infatti si supponga che la EF rotando siasi messa nella posizione della GH; è chiaro che nascerà il triangolo IOM, del quale l'angolo esterno IMD è maggiore dell'interno ed opposto IOM; e similmente l'esterno COI è maggiore dell'interno ed opposto IMO; dunque i due angoli IMD, IMO che la EF fa con CD nella sua

[1] Non dico anche *necessario*, perchè non si è ancora dimostrato che due linee rette parallele intersegate da una terza debbono formare l'angolo esterno uguale all'interno ed opposto.

nuova posizione, sono diversi dai due angoli IOD, IOC che faceva nella primitiva.

Ma per contrario se il punto I scorra su di AB e la EF non roti mai intorno a questo punto, nel qual caso, come si è veduto, gli angoli EIB, EIA non cangiano, e quindi la EF si mantien sempre parallela a sè stessa, è chiaro che anche gli angoli IOD, IOC non cangeranno; perchè non avendo mai luogo la rotazione intorno al punto O non avrà mai luogo il triangolo IOM.

Supponiamo che la EF sia venuta nel suo cammino al punto P; io dico che le parti IO, PQ intercette fra le due parallele sono fra loro uguali. Infatti s'immagini che la PQ si muova per ritornare al punto I, senza mai rotare attorno il punto P che scorre su di AB, cioè facendo in senso contrario lo stesso cammino di prima; è chiaro che quando il punto P sarà giunto in I il punto Q cadrà in O; perchè se non vi cadesse, dovrebbe cadere su di un altro punto M della retta CD; ma in questo caso, come si è veduto, gli angoli IMD, IMO sarebbero differenti dagli angoli IOD, IOC, e quindi anche dai loro uguali PQO, PQC; or questo è contro la supposizione, perchè, non v'essendo rotazione, la PQ si mantien sempre ugualmente inclinata alle due AB, CD; dunque cadendo il punto P in I, anche il punto Q cade in O; epperò PQ combacia con IO e le è uguale. Dunque in generale *allorchè due rette AB, CD intersegate da una terza EF, formino l'angolo esterno EIB uguale all'interno ed opposto dalla stessa parte IOD, e siano perciò parallele, se la segante EF si muova lateralmente senza mai rotare intorno ai punti d'intersezione, rimanendo così per conseguenza parallela sempre a sè medesima, la parte IO intercetta fra le due parallele AB, CD si manterrà sempre la stessa* [1].

Questa osservazione così semplice ci condurrà agevolmente alla dimostrazione del teorema che segue.

[1] Potrebbero alcuni credere che questa proposizione sia la stessa della XXIX che verrà dopo, nella quale si viene a dire che due parallele comprese fra due altre parallele sono uguali, epperò potrebbe sembrar loro superfluo l'averla colà ripetuta con altra dimostrazione. Ma noi faremo osservare che qui le rette sono per una conseguenza parallele, e che la dimostrazione dipende solo dal supporre l'angolo esterno uguale all'interno ed opposto; laddove al contrario

PROPOSIZIONE XXI. — *TEOREMA.*

Se due linee rette che stiano nel medesimo piano, intersegate da una terza facciano la somma degli angoli interni dalla medesima parte maggiore o minore di due retti, queste rette prolungate sufficientemente, s' incontreranno dalla parte ove la somma degli angoli interni è minore di due retti.

Siano le due linee rette **AB**, **CD** (fig. 38) nel medesimo piano, ed intersegate dalla terza **EF** facciano la somma degli angoli interni dalla stessa parte **BGH**, **GHD** maggiore di due retti; io dico che le due rette **AB**, **CD** prolungate sufficientemente dovranno incontrarsi in un punto **A** dall' altra parte, ove per conseguenza la somma degli angoli interni **AGH**, **GHC** è minore di due retti.

Essendo, per ipotesi **BGH** $+$ **GHD** maggiore di due retti, ed **EGB** $+$ **BGH**, come adiacenti, uguale a due retti, sarà **BGH** $+$ **GHD** $>$ **EGB** $+$ **BGH**, e tolto di comune **BGH**, si ha **GHD** $>$ **EGB**. Ora al punto **H** s' immagini tirata **KI** che faccia con **EF** l' angolo **GHI** uguale ad **EGB**; sarà così, per la proposizione precedente, **AB** parallela a **KI**; e dall' essere **GHD** $>$ **EGB** e **GHI** $=$ **EGB**, sarà **GHD** $>$ **GHI**; epperò la **HI** starà nell' angolo **GHD**; ed è chiaro che prolungando **HD**, la **HC** starà nell' angolo **KHG**. S' immagini ora che la **EF** si muova lateralmente sulle rette **AB**, **KI** senza mai rotare intorno ai punti d' intersezione; sia così venuta nel punto **M**; sarà, secondo lo scolio della proposizione antecedente, **GH** $=$ **MN**. Nel punto **T** dove la **CH** incontrerà la **MN** s' immagini tirata **TR** che faccia l' angolo **MTR** $=$ **LMG**; sarà così **TR** parallela ad

nella proposizione XXIX questi angoli sono uguali per una conseguenza, e la supposizione è che le rette sono parallele. Dunque, comechè queste due proposizioni siano intrinsecamente le stesse, pure qui, relativamente all'ordine logico delle idee, la si dee prendere in un senso particolare, non essendosi ancora dimostrato che due rette parallele intersegate da una terza, formano l' angolo esterno uguale all' interno ed opposto.

MG, ed MT = GR; e siccome MN = GH, così essendo MT parte di MN sarà pure GR parte di GH; dunque mentre la retta EF movendosi lateralmente è venuta in M, il punto H scorrendo sulla retta HG è venuto in R. Supponiamo che MN, continuando il suo cammino sia giunta in O; si tiri CS, come prima; sarà OC = MS = GQ, e come MS è parte di MT, sarà GQ parte di GR; dunque mentre MN partendo da M è giunta in O, il punto R scorrendo su di RG è giunto in Q. Continuando così, è manifesto che quando più la retta EF si allontanerà nel suo cammino, tanto più il punto H si avvicinerà al punto G; dunque dopo un sufficiente cammino della retta EF il punto O giungerà in G. Allora, essendo distrutte le parti MT, OC ec., saranno medesimamente distrutte le uguali GR, GQ ec., cioè la retta EF sarà giunta in un punto A dove le due CD ed AB s'incontrano; come bisognava dimostrare.

Dunque è vero che *se due linee rette* ec.

Corollario I. È facile inferire da ciò la proposizione reciproca dell'antecedente, cioè che *due linee rette parallele AB, CD* (fig. 36) *intersegate da una terza EF formano* 1.° *gli angoli alterni uguali fra loro*, 2.° *l'esterno uguale all'interno ed opposto dalla medesima parte*, 3.° *la somma degli angoli interni dalla stessa parte uguale a due retti*.

Questa terza verità è chiarissima perchè se la somma degli angoli interni fosse maggiore o minore di due rette le due rette AB, CD, secondo quello che si è or ora dimostrato, dovrebbero incontrarsi, il che è contro la supposizione. In quanto alle altre due, essendo BGO + GOD uguale a due retti ed AGO + BGO pure uguale a due retti, come adiacenti, sarà BGO + GOD = AGO + BGO, e tolto di comune BGO, si ha GOD = AGO, cioè gli alterni uguali fra loro. Ora essendo AGO = GOD ed AGO = EGB, come opposti al vertice sarà pure EGB = GOD, cioè l'esterno uguale all'interno ed opposto

II. *Ogni linea retta RP* (fig. 39.) *perpendicolare ad una delle parallele EF è pure perpendicolare all' altra CD;* Perchè, essendo retto l'angolo PRQ, dev' essere anche retto l'altro RQD, a fine che la loro somma sia, come dev' essere, uguale a due retti.

III. *Da un punto O* (fig. 36) *posto fuori di una retta AB non si può condurre che una sola parallela a questa retta.* Infatti tirando ad arbitrio la EF che passi per questo punto, non ci ha che una sola retta OD che faccia la somma degli angoli GOD, BGO uguale a due retti, come richiedesi; ogni altra retta farebbe la somma degli angoli interni maggiore ò minore di due retti; e per conseguenza incontrerebbe la AB.

IV. *Due linee rette perpendicolari ciascuna a ciascuna a due rette che s'incontrano, debbono incontrarsi.* Imperocchè se fossero parallele, una delle due rette che s'incontrano perpendicolare ad una di queste parallele, dovrebbe, per il corollario II, essere perpendicolare all'altra parallela; ma a questa, è per ipotesi, perpendicolare l'altra retta; dunque dal medesimo punto, ch'è il punto d'intersezione dello due rette, si sarebbero abbassate due perpendicolari sulla medesima retta il che è impossibile (prop. 16).

Scolio. Si può osservare che quando la EF (fig. 36) non incontra perpendicolarmente le parallele AB, CD fa con queste otto angoli de' quali quattro AGE, BGO COG, DOF sono ottusi, e tutti uguali fra loro; gli altri quattro EGB, AGO, GOD, COF sono acuti e pure uguali fra loro; e la somma di un ottuso con un acuto, comunque presi, è sempre uguale a due angoli retti.

PROPOSIZIONE XXII. — *TEOREMA.*

Due linee rette parallele ad una terza sono parallele fra loro.

Siano le due rette AB, CD (fig. 39.) parallele alla terza EF; io dico ch'esse sono parallele fra loro.

S'intenda tirata la segante PQR perpendicolare ad EF. Essendo, per ipotesi, CD parallela ad EF sarà per il corollario II della proposizione precedente, PR, perpendicolare a CD. Parimente, essendo AB, per ipotesi parallela ad EF, sarà PR perpendicolare ad AB. Dunque le due AB, CD sono entrambe perpendicolari alla medesima PR; esse quindi sono parallele, (prop. 20, cor.), come si voleva dimostrare.

Il che *due rette parallele ad una terza* ec.

PROPOSIZIONE XXIII — *TEOREMA*.

Due linee rette parallele sono da per tutto ugualmente distanti.

Siano le due parallele AB, CD (fig. 40). Da un punto qualunque H dell' una si abbassi sull' altra AB la perpendicolare HF; questa sarà pure perpendicolare a CD (prop. 21, cor. 2. 1); questa HF perpendicolare comune delle due parallele si estima per loro distanza. Ora siano le due distanze HF, GE, prese da due punti ad arbitrio H, G: io dico ch'esse sono fra loro uguali, ch'è quanto dire che le due parallele AB, CD sono da per tutto ugualmente distanti.

Imperocchè, congiunta HE, i due angoli GHE, HEF, come alterni rispetto alle parallele AB, CD sono uguali (prop. 21 cor. 1); parimente essendo le due HF, GE perpendicolari alla medesima AB sono parallele fra loro (prop. 20, cor.) dunque gli angoli alterni FHE, HEG sono uguali fra loro. Così i due triangoli HFE, HEG hanno il lato HE di comune adiacente a due angoli rispettivamente uguali; epperò sono uguali (prop. 7); dunque il lato HF opposto all'angolo HEF è uguale al lato EG opposto all'angolo uguale GHE; come si voleva dimostrare.

Laonde *due linee rette parallele* ec.

PROPOSIZIONE XXIV — *TEOREMA*.

Prolungando un lato di un triangolo l' angolo esterno è uguale alla somma de' due interni ed opposti.

Del triangolo ABC (fig. 35) sia prolungato un lato BC; io dico che l'angolo esterno ACD è uguale alla somma de' due interni ed opposti BAC, ABC.

Dal punto C s'immagini tirata CE parallela ad AB. Saranno così gli angoli alterni BAC, ACE uguali fra loro, e l' esterno ECD uguale all'interno ed opposto ABC. Ora l'angolo ACD, come tutto, è uguale alla somma delle parti ACE, FCE; dunque sosti-

tuendo a questi due angoli i loro uguali BAC, ABC si avrà ACD= BAC + ABC, come bisognava provare.

Dunque *prolungando un lato di un triangolo* ec.

Scolio. La proposizione XIX si accorda con questa, anzi ne è un corollario; perchè se l'angolo esterno è uguale alla somma dei due interni ed opposti, deve per conseguenza essere maggiore di uno di essi.

PROPOSIZIONE XXV — *TEOREMA.*

La somma dei tre angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti.

Sia un triangolo qualunque ABC (fig. 35); io dico che la somma de' suoi tre angoli è uguale a due retti.

Infatti si prolunghi un lato qualunque BC; in virtù del teorema antecedente, l'angolo esterno ACD è uguale alla somma dei due interni ed opposti BAC, ABC; aggiunto di comune l'angolo ACB, sarà ACD + ACB = BAC + ABC + ACB; ma la somma de' due primi, come adiacenti, è uguale a due retti; dunque anche la somma de' tre angoli del triangolo ABC è uguale a due retti.

Dunque *la somma de' tre angoli* ec.

Corollario I. Da ciò segue che se si conoscono due angoli di un triangolo, o solamente la loro somma, si otterrà il terzo togliendo la somma de' due angoli da quella di due retti.

II. Se due angoli di un triangolo sono rispettivamente uguali a due angoli di un altro triangolo, il terzo sarà pure uguale al terzo, e i due triangoli saranno perciò equiangoli.

III. In un triangolo non vi può essere più di un angolo retto; perchè se ve ne fossero due, il terzo dovrebbe esser nullo; a più forte ragione un triangolo non può avere più di un angolo ottuso. Questo era già stato asserito nelle definizioni, in parlando dei triangoli rettangoli ed ottusangoli.

IV. In ogni triangolo rettangolo la somma de' due angoli acuti è uguale a due retti; e in ogni triangolo ottusangolo la somma degli angoli acuti è minore di due retti.

V. Due triangoli che hanno un lato uguale ad un lato e due angoli non adiacenti al primo lato uguale a due angoli non adiacenti al secondo sono uguali; perchè essendo, pel corollario II, il terzo angolo del primo triangolo uguale al terzo del secondo, i due triangoli vengono ad avere un lato uguale ad un lato e i due angoli adiacenti al primo lato rispettivamente uguali ai due angoli adiacenti al secondo; il che è il caso della proposizione VII; dunque questi triangoli sono uguali.

VI. Due triangoli rettangoli che hanno un lato uguale ed un angolo acuto uguale sono uguali.

VII. Quando un triangolo rettangolo o ottusangolo è isoscele i lati uguali non possono essere che quelli che comprendono l'angolo retto, o l'angolo ottuso. In un triangolo rettangolo isoscele ciascun angolo acuto è la metà di un retto, o, come dicesi, un *semiretto;* in un triangolo ottusangolo isoscele, ciascun angolo acuto è minore di un semiretto.

VIII. In un triangolo equilatero, il quale per conseguenza, come si è veduto, è pure equiangolo, ciascun angolo è la terza parte di due angoli retti, ch'è quanto dire due terzi di un retto. Esprimendo dunque con 1 l'angolo retto, l'angolo del triangolo equilatero sarà espresso da $\frac{2}{3}$

PROPOSIZIONE XXVI — *TEOREMA*.

La somma degli angoli interni di un poligono è uguale a tante volte due angoli retti, quante unità sono nel numero de' suoi lati meno due.

Sia ABCDEFG (fig. 41) un poligono qualunque; se dal vertice di uno stesso angolo A si conducano ai vertici di tutti gli angoli opposti le diagonali AC, AD, AE, AF, è facile di vedere che il poligono sarà diviso in tanti triangoli, quanti sono i suoi lati meno due; perchè questi triangoli possono essere considerati come aventi per vertice comune il punto A e per basi i differenti lati del poligono, eccetto i due che formano l'angolo A. Ora si vede

che la somma degli angoli di tutti questi triangoli è la stessa che la somma degli angoli del poligono; dunque la somma degli angoli di questo poligono è uguale a tante volte due angoli retti quanti triangoli vi sono, cioè quante unità sono nel numero dei lati meno due; come si voleva dimostrare.

Dunque *la somma degli angoli interni* ec.

Corollario I. Dunque la somma degli angoli di un quadrilatero è uguale a 2 angoli retti moltiplicati per $4-2$, cioè a quattro angoli retti. Dunque se tutti gli angoli di un quadrilatero sono uguali, ciascun d'essi sarà un angolo retto; il che si era già asserito nelle definizioni, parlando del rettangolo.

II. La somma degli angoli di un pentagono è uguale a 2 angoli retti moltiplicati per $5-2$, cioè a 6 angoli retti. Dunque se il pentagono è equiangolo ciascun angolo è la quinta parte di sei angoli retti; ch'è quanto dire $\frac{5}{6}$ di un retto.

III. La somma degli angoli di un esagono è uguale a 2 retti moltiplicato per $6-2$, cioè ad 8 retti. Dunque l'angolo dell'esagono equiangolo, è la sesta parte di 8 retti, cioè gli $\frac{8}{6}$, ovvero i $\frac{4}{3}$ di un retto.

E nello stesso modo si può valutare l'angolo di ogni altro poligono equiangolo.

IV. È facile di vedere che se n è il numero dei lati di un poligono, $n-3$ sarà il numero delle diagonali che si ponno menare da uno stesso vertice. Infatti nel poligono ABCDE FG, la diagonale AC separando da questo poligono il triangolo ABC, fa rimanere il poligono ACDE FG che ha un lato di meno. Menando ancora in questo poligono la diagonale AD, si ha l'altro ADEFG di un lato di meno; e così appresso. Giunti che si sarà al quadrilatero AEFG, la sola diagonale AF lo divide in due triangoli AEF, AGF. Così dunque, avendosi prima tante diagonali quanti triangoli e lati si sopprimevano, e in ultimo giunti al quadrilatero una sola diagonale dando due triangoli; se ne deduce che se n è il numero de' lati di un poligono $n-3$ è il numero delle diagonali che si ponno tirare da un medesimo vertice; come avevamo as-

scrito. E per questa ragione che nel triangolo non vi sono diagonali.

Scolio I. È facile di osservaro cho in un poligono qualunque prolungando ciascun lato dallo stesso verso, la somma degli angoli esterni è sempre uguale a quattro angoli retti.

II. Se si volesse applicare questa proposizione ad un poligono nel quale fosse uno o più *angoli rientranti* (fig. 42) bisognerebbe considerare ciascun angolo rientrante como maggiore di due angoli retti. Ma noi, a fine di tor via ogn' imbarazzo, non considereremo e qui e in progresso se non i poligoni ad angoli *rientranti*, i quali ponno anche dirsi *poligoni convessi*. Ogni poligono convesso è tale che una linea retta, menata come si voglia, non può incontrare il perimetro di questo poligono che in due punti.

III. Si noti che l' angolo di un poligono equiangolo cresce a misura che cresce il numero de' lati del poligono.

PROPOSIZIONE XXVII — *TEOREMA.*

Due triangoli sono uguali, quando hanno due lati rispettivamente uguali a due lati, e un angolo opposto ad uno de' due primi lati uguale all' angolo opposto al lato uguale de' due secondi. Nel caso che gli angoli uguali siano acuti richiedesi anche che gli angoli adiacenti degli angoli uguali sui lati che non si suppongono uguali siano della medesima specie, cioè entrambi retti, o ottusi, o acuti.

1.° Suppongasi prima che gli angoli uguali siano retti (fig. 33). Io dico che due triangoli rettangoli ABC, DEF i quali hanno l'ipotenusá AC uguale all'ipotenusa DF, ed un cateto AB uguale ad un cateto DE, sono uguali.

Per provar ciò basta dimostrare che l' altro cateto BC è uguale all' altro EF, perchè allora i duo triangoli, avendo i loro tre lati rispettivamente uguali, saranno uguali (prop. 12.). Ora se mi si nieghi che BC ed EF sono uguali, siano essi disuguali e sia,

BC $>$ EF. Sopra BC a partire dal punto B si prenda la parte BG $=$ EF; i due triangoli ABG, DEF, avendo un angolo uguale ad un angolo e i due lati che comprendono il primo rispettivamente uguali ai due che comprendono il secondo, cioè ABG $=$ DEF, AB $=$ DE, per ipotesi, e BG $=$ EF per costruzione, sono uguali, e quindi il terzo lato AG è uguale al terzo DF (prop. 6); ma per ipotesi AC $=$ DF, dunque anche l'obbliqua AG è uguale all'obbliqua AC ch'è più lontana dalla perpendicolare AB, il che è assurdo. Dunque i due lati BC, EF non possono essere disuguali; epperò i due triangoli ABC, DEF sono uguali.

2.° Siano ora i due triangoli ABC, EFG (fig. 110) i quali abbiano l'angolo ottuso ABC uguale all'angolo ottuso EFG, il lato AC $=$ EG che sono opposti agli angoli uguali, e il lato AB $=$ EF, dico essere il triangolo ABC uguale al triangolo EFG.

Dal punto A si tiri AD perpendicolare a BC; è chiaro che questa perpendicolare cadrà nel prolungamento di BC, cioè fuori del triangolo ABC; perchè se cadesse dentro vi sarebbero in un triangolo un angolo retto e un angolo ottuso, il che è impossibile (prop. 24, cor. 3) similmente dal punto E si tiri EH perpendicolare ad FG. Sendo, per ipotesi, l'angolo ABC $=$ EFG, sarà pure ABD $=$ EFH; ma AB $=$ EF per supposizione; dunque i due triangoli rettangoli ABD, EHF hanno un lato uguale ed un angolo acuto uguale, epperò sono uguali (prop. 24, cor. 6); e quindi AD $=$ EH e DB $=$ HF. Ora i due triangoli rettangoli ADC, EHG hanno l'ipotenusa AC $=$ EG, per ipotesi, il cateto AD $=$ EH, per quello che si è dimostrato; essi dunque sono uguali, epperò DC $=$ HG; ma si è dimostrato DB $=$ HF; dunque l'altra parte BC $=$ FG; dunque i due triangoli ABC, EFG hanno i loro tre lati rispettivamente uguali; epperò sono uguali, come si voleva dimostrare.

3.° In ultimo siano i due triangoli ABC, EFG, (fig. 111) i quali abbiano l'angolo acuto B uguale all'angolo acuto F, il lato AC $=$ EG che sono opposti a questi angoli, ed il lato AB $=$ EF; di più gli angoli C e G adiacenti dei due uguali B ed F sui lati BC, FG che non si suppongono uguali, della medesima specie, per esempio, entrambi acuti; dico essere il triangolo ABC uguale al triangolo EFG.

Dai punti A ed E si abbassino su BC ed FG le perpendicolari

AD, EH; è chiaro che queste perpendicolari dovranno cadere dentro i due triangoli. I due triangoli rettangoli ABD, EFH sono uguali, perchè hanno un angolo acuto uguale ed un lato uguale, cioè ABD = EFH ed AB = EF, per ipotesi; dunque sarà pure AD = EH e BD = FH. Gli altri due triangoli rettangoli ADC, EHG hanno l'ipotenusa uguale ed un cateto uguale, cioè AC = EG, per ipotesi, ed AD = EH, per quello che si è dimostrato; essi dunque sono uguali, e quindi sarà DC = HG; ma si è dimostrato BD = FH; dunque tutta BC è uguale a tutta FG epperò i due triangoli ABC, EFG avendo i loro tre lati rispettivamente uguali sono uguali; come facea d'uopo provare.

Dunque *due triangoli sono uguali* ec.

Scolio I. Nel terzo di questi tre casi vi è la restrizione che i due triangoli debbano essere della medesima specie; perchè essendo acuti gli angoli uguali, B, F potrebbe avvenire che i due C e G fossero l'uno ottuso o retto e l'altro acuto; e in questo caso non cadendo le due perpendicolari AD, EH entrambe dentro i triangoli, la dimostrazione non potrebbe più aver luogo. Nei tre altri casi poi non vi è bisognata questa restrizione, perchè, essendo retti o acuti gli angoli uguali, i triangoli necessariamente dovevano essere della medesima specie, epperò le perpendicolari o cadevano entrambe fuori de' triangoli, o erano lati de' triangoli, e così le due dimostrazioni han sempre luogo.

II. In un triangolo sei cose sono da considerare, cioè tre angoli e tre lati; ora si deduce da quanto si è detto sull'eguaglianza do' triangoli che un triangolo è determinato quando sono date tre di queste cose, purchè tra queste tre si trovi almeno un lato. In generale tre condizioni sono necessarie e sufficienti per determinare un triangolo; qui negli elementi si considerano le tre primitive condizioni che riguardano i lati e gli angoli del triangolo; ma date anche tre altre condizioni diverse, il triangolo resterebbe parimente determinato; come si può vedere nei problemi proposti alla fine della geometria piana.

La ragione per la quale dati tre angoli, il triangolo non resta determinato, si è che il dare tre angoli non importa dare tre condizioni, ma due. Infatti dovendo essere la loro somma uguale a due retti, il terzo è una conseguenza degli altri due; epperò si

vengono a dare due angoli; cioè due condizioni, che non sono sufficienti.

III. Essendo dunque nel triangolo 6 il numero degli elementi, cioè tre lati e tre angoli, $6-3$ è il numero delle condizioni necessarie e sufficienti per determinare un triangolo. Generalmente essendo n il numero de'lati di un poligono, e quindi $2n$ il numero de' suoi elementi, $2n-3$ di questi elementi e generalmente $2n-3$ condizioni sono necessarie e sufficienti per determinare questo poligono. Infatti suppongasi che vogliasi costruire il poligono ABCDEFG (fig. 41), dati tutti i suoi angoli e tutti i suoi lati. Si prenderà prima su di una retta indefinita una parte AB ugualo ad un lato dato; indi ai punti A e B sulla retta AB si formeranno i due angoli ABC,BAG uguali a quelli che si sanno dover essere adiacenti ad AB; si prenderanno poi le parti BC, AG date; e così di seguito. Dopo di avere determinati i lati AB, AG, GF, FE, ED, BC, l'ultimo lato CD resta determinato al pari degli angoli BCD, CDE. O pure, tracciati i lati AB, AG, GF, FE, BC, ed indi costruiti ai punti G ed E su BC ed EF gli angoli dati BCD, DEF, si vede che i due lati CD, DE e l'angolo CDE restano determinati. In ultimo, determinati i lati AB, AG, GF, FE, BC; se si fa centro C ed intervallo il lato dato CD, centro E ed intervallo il lato dato ED, resteranno determinati i tre angoli BCD, CDE, DEF. Esistono dunque tali relazioni tra i lati e gli angoli di un poligono che si ponno determinare tre angoli qualunque, o un lato e due angoli o due angoli e un lato, allorchè siano dati tutti i rimanenti lati ed angoli. Non è qui nella geometria elementare il luogo da potersi risolvere tali problemi; basterà solo il sapere che tali relazioni esistono [1]. Nei soli triangoli si potranno risolvere questi problemi; e la ragione è che in un triangolo un lato dato e sempre adiacente a due angoli dati; un angolo dato è sempre o compreso fra i due lati dati, o opposto ad uno di essi; e i tre lati dati sono sempre consecutivi; il che non sempre avviene ne' poligoni di più di tre lati.

[1] Noi rimandiamo i nostri lettori che avessero già entratura nella Trigonometria, agli eccellenti trattati di Poligonometria del Mascheroni o del Lhuilier.

PROPOSIZIONE XXVIII — *TEOREMA*.

Due angoli che hanno i loro lati rispettivamente paralleli e rivolti nello stesso senso, sono uguali fra loro.

Siano i due angoli BAC , DEF (fig. 43) i quali abbiano il lato AB parallelo al lato DE , ed AC parallelo ad EF , e di più siano i due AB , ED diretti nello stesso senso , come pure i due AC, EF ; dico essere l' angolo BAC = DEF.

Si prolunghi DE fino a che incontri AC nel punto G, se già pure non l' incontrasse prima. Essendo , per ipotesi, AB parallela a DE sarà l'angolo esterno DGC uguale all'interno ed opposto BAC ; (prop. 21 , cor. 1) ed essendo AC parallela ad EF sarà parimente DGC=GEF; dunque i due angoli BAC, DEF, uguali al terzo DGC sono uguali fra loro.

Quindi è vero che *due angoli che hanno* ec.

Scolio. Si pone in questa proposizione la restrizione che il lato EF sia diretto nel medesimo senso che AC ed ED nello stesso senso che AB ; e la ragione è che se prolungasi FE verso H, l'angolo DEH avrebbe bensì i suoi lati paralleli a quelli dell' angolo BAC, ma non sarebbegli uguale. In tal caso, come è facilissimo di vedere, l' angolo DEH e l' angolo BAC farebbero insieme due angoli retti.

PROPOSIZIONE XXIX. — *TEOREMA*.

In ogni parallelogrammo i lati e gli angoli opposti sono uguali fra loro.

Sia il parallelogrammo ABCD, (fig. 44) ch' è quanto dire sia AB parallela a DC ed AD parallela BC; dico essere i lati opposti uguali , come pure gli angoli apposti uguali , cioè AB = DC , AD = BC, ABC = ADC , DAB = DCB.

Si tiri la diagonale BD ; i due triangoli ADB, DBC hanno il lato

comune BD; di più, a cagione delle parallele AD, BC, l' angolo ADB = DBC, come alterni (prop. 21, cor. 1) ed a cagione delle parallele AB, CD l' angolo ABD = BDC; dunque i due triangoli ADB, DBC sono uguali (prop. 7), e quindi il lato AB = DC, che sono opposti agli angoli uguali ADB, DBC, e parimente AD = BC, che sono opposti agli angoli uguali ABD, BDC. Dunque i lati opposti di un parallelogrammo sono uguali, come si voleva dimostrare.

Secondariamente, dall' eguaglianza degli stessi triangoli si deduce che l' angolo A è uguale all' angolo C, che sono opposti allo stesso lato DB; e che l'angolo ADC, ch' è la somma de' due ADB, BDC, è uguale all' angolo ABC, ch'è la somma de' due DBC, ABD, rispettivamente uguali ai due primi. Dunque gli angoli opposti di un parallelogrammo sono uguali.

Epperò *in ogni parallelogrammo* ec.

Corollario. Dunque due parallele AB, CD comprese fra due altre parallele AD, BC sono uguali.

Scolio. Si osservi che la diagonale divide il parallelogrammo in due parti uguali.

PROPOSIZIONE XXX. — *TEOREMA*.

Reciprocamente se in un quadrilatero gli angoli opposti o i lati opposti siano uguali, questo quadrilatero sarà un parallelogrammo.

1.° Nel quadrilatero ABCD (fig. 44) siano gli angoli opposti uguali, cioè ADC = ABC, e DAB = DCB; dico che il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo.

Imperocchè se nieghisi che le due DC, CB sieno rispettivamente parallele alle due AB, AD, siano DO, OB queste parallele. Essendo così ABOD un parallelogrammo sarà, in virtù del teorema precedente, l'angolo ADO = ABO; ora ADO, come tutto è maggiore della parte ADC; ed essendo, per ipotesi ADC = ABC, sarà ADO > ABC; e sostituendo ad ADO il suo uguale ABO, sarà ABO > ABC; cioè

la parte maggiore del tutto ; ciò è assurdo ; dunque DC e CB sono le rispettive parallele di AB ed AD; cioè il quadrilatero ABDO è un parallelogrammo.

Se le rette si facessero incontrare nel punto M, in modo che l' angolo DCB, sia compreso in DMB; allora la dimostrazione si farebbe così. Dovendo essere DMB = DAB, e DCB = DAB, per ipotesi, sarebbe AMB = DCB; il che come si è veduto nello scolio della proposizione XIX è impossibile.

2° Siano ora i lati opposti uguali, cioè AB = DC AD = BC; dico anche che il quadrilatero è un parallelogrammo.

Peroccbè se DC e CB non sono rispettivamente parallele ad AB ed AD, siano DO, OB queste parallele. Essendo ABOD un parallelogrammo, sarà DO = AB ed OB = AD; ma si ha, per ipotesi, DC = AB e BC = AD; dunque sarà nel medesimo tempo AO = DC e BO = BC; il che, come si è veduto nello scolio II della proposizione XII, è impossibile; dunque DC e CB sono le rispettive parallele di AB, AD, e così il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo; come si voleva dimostrare.

Se le rette si facessero incontrare nel punto M, allora sarebbe DM = DC e MB = CB, e quindi DM + MB = DC + CB il che, come si è veduto nella proposizione IX, è impossibile.

Ma, non volendo far uso della riduzione all'assurdo, la dimostrazione potrebbe anche procedere direttamente nel modo che segue. Si tiri la diagonale BD; i due triangoli ABD, BDC sono uguali, perchè hanno i loro tre lati rispettivamente uguali, cioè DB di comune, DC = AB e AD = BC, per ipotesi; dunque l' angolo ADB = DBC, come opposti ai lati uguali AB, DC; ma questi sono alterni rispetto alle due AD, BC; dunque queste due sono parallele (prop. 20.); per una simile ragione AB è parallela a DC; dunque il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo.

Scolio. Dunque il rettangolo e il rombo, e quindi anche il quadrato, sono tanti parallelogrammi, come avevamo già detto nelle definizioni, parlando di questi quadrilateri.

PROPOSIZIONE XXXI. — *TEOREMA.*

Se due lati opposti di un quadrilatero sono uguali e paralleli, gli altri due saranno eziandio uguali e paralleli, e così il quadrilatero sarà un parallelogrammo.

Nel quadrilatero ABCD (fig. 44) siano i due lati opposti AB,DC uguali e paralleli; dico essere altresì uguali e paralleli, gli altri due AD, BC.

Sia tirata la diagonale BD; poichè AB è parallela a CD, gli angoli alterni ABD,BDC sono uguali (prop. 21. cor. 1); d'altra parte il lato AB = DC, il lato DB è comune, dunque il triangolo ABD è uguale al triangolo DBC (prop. 6), e quindi il lato AD = BC, l'angolo ADB = DBC, e per conseguenza AD è parallela a BC; dunque il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo.

PROPOSIZIONE XXXII. — *TEOREMA.*

Le due diagonali di un parallelogrammo si tagliano scambievolmente in due parti uguali.

Sia un parallelogrammo qualunque ABCD (fig. 45.), io dico che le sue due diagonali AC,DB si tagliano l'una l'altra per metà nel punto O.

Paragonando infatti il triangolo ADO al triangolo COB, si trova il lato AD = CB, l'angolo ADO = CBO, come alterni rispetto alle parallele AD, BC; e per una simile ragione l'angolo DAO = OCB; dunque questi due triangoli sono uguali (prop. 7); dunque il lato AO = OC, che sono opposti agli angoli uguali ADO, OBC; e così pure DO = OB.

Dunque *le due diagonali di un parallelogrammo* ec.

***Scolio.* Nella losanga le due diagonali oltre di tagliarsi scambievolmente per metà, si tagliano anche ad angoli retti; perchè essendo DA = DC, i due triangoli ADO, DOC hanno i loro tre lati rispettivamente uguali, epperò sono uguali; e quindi l'angolo**

DOA = DOC, che si oppongono ai lati uguali; dal che si vede che DB è perpendicolare ad AC.

Dall' uguaglianza di questi triangoli segue che nella losanga la diagonale divide gli angoli opposti per metà; perchè l' angolo ADO = ODC, che sono opposti ai lati uguali AO, OC, e così pure OBC = OBA.

Nel rettangolo le due diagonali sono uguali fra loro, perchè essendo l'angolo DAB retto, al pari dell' angolo ABC, questi angoli sono uguali, e i due triangoli DAB, ABC, avendo un angolo uguale ad un angolo e i due lati che comprendono il primo rispettivamente uguali ai due che comprendono il secondo, sono uguali; epperò il terzo lato AC è uguale al terzo lato DB.

In ultimo nel quadrato ch' è rettangolo e losanga insieme, le due diagonali sono uguali e si tagliano ad angoli retti.

PROPOSIZIONE XXXIII. — *TEOREMA.*

Reciprocamente se in un quadrilatero le due diagonali si tagliano scambievolmente per metà, questo quadrilatero sarà un parallelogrammo.

Nel quadrilatero ABCD (fig. 45.) le due diagonali AC, DB si taglino scambievolmente in due parti uguali nel punto O; dico che questo quadrilatero è un parallelogrammo.

Infatti i due triangoli AOD, BOC, avendo l'angolo AOD=BOC, come opposti al vertice, il lato DO = OB e il lato AO = OC, per ipotesi, sono uguali; dunque il terzo lato AD è uguale al terzo lato AC; così pure si dimostra AB = DC; dunque il quadrilatero ABCD, avendo i lati opposti uguali, è un parallelogrammo (prop. 30), come si voleva dimostrare.

Scolio. Anche le inverse delle proposizioni di cui è parola nello scolio del teorema precedente sono vere.

Se in un parallelogrammo le due diagonali si tagliano ad angoli retti, questo parallelogrammo sarà una losanga; perchè essendo l' angolo AOD = DOC, come retti, i due triangoli AOD,DOC avendo un angolo uguale ad un angolo e i due lati che compren-

dono il primo rispettivamente uguali ai due lati che comprendono il secondo, sono uguali; epperò il terzo lato AD è uguale al terzo lato DC.

Se in un parallelogrammo le due diagonali sono uguali, questo parallelogrammo è un rettangolo; perchè allora i due triangoli ADB,ABC sono uguali perchè hanno i loro tre lati rispettivamente uguali; dunque l'angolo DAB = ABC come opposti ai lati uguali DB, AC; ma la loro somma dev'essere uguale a due retti; dunque ciascuno di essi è retto.

Se in un parallelogrammo le due diagonali sono uguali e si tagliano ad angoli retti, questo parallelogrammo è un quadrato; perchè, secondo quello che si è dimostrato, dev'essere rettangolo e losanga insieme.

LIBRO II

DEL CERCHIO E DELLA MISURA DEGLI ANGOLI.

DEFINIZIONI

I. Il *cerchio* (fig. 46) è una figura piana terminata da una sola linea curva; della quale linea curva, che si addimanda *circonferenza*, tutti i punti sono ugualmente distanti da un punto interno che si chiama *centro*. Questa definizione del cerchio è genetica, cioè ce ne mostra la generazione. Il cerchio è generato da una linea retta la quale rota su di un piano attorno un suo estremo fisso; questo estremo fisso è il centro, e l'altro estremo genera la circonferenza.

Bisogna perciò guardarsi di confondere il cerchio con la circonferenza; perchè il cerchio è una superficie, laddove la circonferenza è una linea.

II. Ogni linea retta che congiunge il centro di un cerchio con un punto della sua circonferenza dicesi *raggio* o *semidiametro*, perchè metà del *diametro;* il qual diametro è una retta che passa pel centro ed è terminata alla circonferenza; ch'è quanto dire è quella retta che formano due raggi che stiano per dritto.

Dalla definizione stessa del cerchio, la qual è che ogni punto della circonferenza è ugualmente distante dal centro, segue che tutti i raggi del medesimo cerchio, i quali appunto costituiscono queste diverse distanze, sono uguali. Quindi anche i diametri, come doppi de' raggi, sono uguali.

III. Egli è evidente che due cerchi sono uguali quando sono descritti con raggi uguali.

IV. Si chiama *arco* (fig. 46) una porzione di circonferenza. Quella retta che unisce le due estremità dell'arco dicesi *corda ;* e si suol dire che la corda *sottende* l'arco. È poi evidente che la corda sta tutta dentro del cerchio [1].

Dopo ciò si può dire che il diametro è quella corda che passa pel centro.

V. *Segmento* (fig. 46) è la porzione di cerchio compresa tra l'arco e la corda. Onde si vede che il segmento è una figura piana mistilinea.

Ad una stessa corda corrispondono due archi, e per conseguenza due segmenti; ma s' intende sempre parlare del minore, eccetto in alcun caso in cui si esprime il contrario.

VI. *Settore* (fig. 46) è la porzione di cerchio compreso tra un arco e i due raggi condotti alle estremità di questo arco. Anche il settore è una figura piana mistilinea.

VII. Si chiama *linea retta iscritta nel cerchio* quella che ha i suoi estremi alla circonferenza.

Angolo iscritto è un angolo che ha il vertice nella circonferenza, e i cui lati sono due corde. *Angolo al centro* è quello che ha il vertice al centro.

Un poligono si dice *iscritto in un cerchio* (fig. 68) quando i vertici di tutti i suoi angoli sono nella circonferenza; ovvero quando tutti i suoi angoli sono iscritti nel cerchio. Si dice allora che il cerchio è *circoscritto* al poligono.

VIII. *Segante* è ogni linea retta che incontra la circonferenza in due punti.

IX. *Tangente* è ogni linea retta che ha un sol punto di comune con la circonferenza.

Parimente due circonferenze si dicono tangenti quando non hanno che un sol punto di comune, sono poi tangenti o *esternamente* o *internamente*, secondo che sono l' una fuori dell' altra, o l' una dentro dell' altra.

Il punto di comune tra la retta e la circonferenza, o tra le due circonferenze, si chiama *punto di contatto*.

[1] Euclide nel suo terzo libro dimostra questa proposizione; ma ella, come si vede, è troppo chiara perchè non abbisogni punto di dimostrazione.

X. Un poligono si dice *circoscritto a un cerchio* (fig. 160) allorchè tutti i suoi lati sono tangenti della circonferenza; e allora il cerchio si dice *iscritto* nel poligono.

PROPOSIZIONE PRIMA. — *TEOREMA.*

Il diametro divide il cerchio e la sua circonferenza in due parti uguali.

Sia il cerchio AFB (fig. 49); io dico che il suo diametro AB divide questo cerchio in due segmenti uguali AFB,AEB, e la sua circonferenza in due archi uguali AFB, AEB.

Applicando infatti la figura AFB sulla figura AEB, conservando la base comune AB, bisognerà che l'arco AEB cada sull'arco AFB, altrimenti vi sarebbero nell'uno o nell'altro di questi due archi alcuni punti disugualmente distanti dal centro, il che è contrario alla definizione del cerchio. Adunque combaciando tanto i due segmenti che i due archi, sono uguali; epperò il diametro divide il cerchio e la sua circonferenza in due parti uguali; come bisognava dimostrare.

Scolio. Ciascuno de' due segmenti uguali si chiama *semicerchio*, e ciascuno de' due archi uguali *semicirconferenza*.

Si vede da ciò che dividendo in due parti uguali la circonferenza di un cerchio, e congiungendo i due punti di sezione, la corda passa pel centro.

PROPOSIZIONE II. — *TEOREMA.*

In un cerchio ogni corda è minore del diametro.

Nel cerchio AFB (fig. 49) sia una corda qualunque AD; io dico ch' essa è minore del diametro.

Dal punto A si tiri il diametro AB, e si meni il raggio CD; nel triangolo ACD si ha $AD < AC + CD$; ma la somma dei due raggi AC, CD è uguale al diametro AB, ch'è doppio del raggio; dunque $AD < AB$. Dunque in un cerchio ogni corda è minore del diametro, come bisognava dimostrare.

Corollario. Dunque la massima linea retta che si possa iscrivere in un cerchio è uguale al suo diametro.

PROPOSIZIONE III. — *TEOREMA.*

Una linea retta non può incontrare una circonferenza in più di due punti.

Perocchè se la incontrasse in tre punti, questi tre punti sarebbero ugualmente distanti dal centro; vi sarebbero dunque così tre linee rette uguali condotte su di una medesima linea retta da un medesimo punto fuori di essa; il che è impossibile (prop. 17, lib. 1.) Dunque una linea retta non può incontrare una circonferenza in più di due punti.

PROPOSIZIONE IV. — *TEOREMA.*

In un medesimo cerchio o in cerchi uguali gli archi uguali sono sottesi da corde uguali, e reciprocamente le corde uguali sottendono archi uguali.

Nei due cerchi uguali ADB, EGF (fig. 50) sia l'arco AMD uguale all'arco ANG; dico che le corde AD ed EG che sottendono questi archi sono uguali fra loro.

Si tirino i due diametri AB, EF; essendo questi uguali, si potrà sovrapporre esattamente il semicerchio AMDB sul semicerchio ENGF; e così la semicirconferenza AMDB coinciderà intieramente colla semicirconferenza ENGF. Ma la porzione AMD si suppone uguale alla porzione ENG; dunque il punto D cadrà sul punto G; e così la corda AD combaciando con l'altra EG, le è uguale; come si voleva dimostrare.

Reciprocamente, supponendo sempre uguali i due cerchi, essendo uguali le due corde AD, EG, io dico che gli archi AMD, ENG sottesi da queste corde sono uguali.

Infatti, tirando i raggi CD, OG, i due triangoli ACD, EOG avranno i loro tre lati rispettivamente uguali, cioè $AC = EO$, $CD = OG$, come raggi di cerchi uguali, ed $AD = EG$, per ipotesi; dunque questi triangoli sono uguali (12, 1); quindi l'angolo ACD

= EOG. Ma sovrapponendo il semicerchio ADB sul suo uguale EGF, poichè l'angolo ACD = EOG, è chiaro che il raggio CD cadrà sul raggio OG, e il punto D sul punto G; dunque l'arco AMD è uguale all' arco ENG.

Dunque *in un medesimo cerchio o in cerchi uguali* ec.

Scolio. È chiaro da questa proposizione che se in una stessa circonferenza o in due uguali circonferenze si prendano due archi qualunque e si sovrappongano l' uno sull'altro, il minore combacerà esattamente con una ugual parte del maggiore; ciò avviene per la uniformità della curvatura della circonferenza. È evidente che anche della linea retta avviene lo stesso, cioè poste due linee rette qualunque l' una sull' altra, la minore coincide perfettamente con una ugual parte della maggiore; e ciò pure dipende dalla uniformità della posizione di ciascun punto dalla linea retta, cioè dal carattere geometrico fissato da noi innanzi, quando abbiamo detto che la linea retta è tale che se due de'suoi punti siano ciascuno ugualmente distante da due punti che stiano fuori di questa retta, ogni altro punto della linea retta è pure ugualmente distante da quei due punti. Queste due linee, la retta e la circonferenza, sono le sole che godono della proprietà, onde abbiam fatto menzione; ogni altra linea curva è tale che una sua porzione qualunque non dee combaciare necessariamente con un' altra porzione. La Geometria elementare si occupa solamente della linea retta e della circonferenza, appunto per la facilità onde si dimostrano le proprietà loro; facilità che procede unicamente dall' essere ciascuna di queste due linee uniforme da ogni parte.

PROPOSIZIONE V. — *TEOREMA.*

Nel medesimo cerchio o in cerchi uguali di due corde la maggiore è quella che sottende un arco maggiore, e reciprocamente di due archi il maggiore è quello che è sotteso da una corda maggiore, quando gli archi di cui si tratta siano minori della semicirconferenza; nel caso che questi archi siano maggiori della semicirconferenza, avviene il contrario.

Sia nel medesimo cerchio ADB (fig. 50) l'arco AMH mag-

giore di AMD; io dico che la corda AH è maggiore della corda AD.

Si sovrappongano gli archi l'uno sull'altro, in modo che abbiano la medesima estremità A; e si tirino i raggi CA, CD, CH. I due lati AC, CH del triangolo ACH sono uguali ai due lati AC, CD del triangolo ACD, perchè son tutti raggi; l'angolo ACH è maggiore dell'angolo ACD; dunque il terzo lato AH è maggiore del terzo lato AD (10, 1). Dunque nel medesimo cerchio o in cerchi uguali di due corde la maggiore è quella che sottende un arco maggiore.

Reciprocamente, supponendo la corda AH maggiore della corda AD, i due triangoli ACH, ACD hanno i due lati AC, CH uguali ai due lati AC, CD e il terzo lato AH maggiore del terzo lato AD; dunque l'angolo ACH è maggiore dell'angolo ACD (11, 1); ma questi angeli hanno il lato AC di comune; dunque il lato CD sta dentro dell'angolo ACH; cioè il punto D si trova sull'arco AH; dunque l'arco AD è minore dell'arco AH, di cui è parte. Epperò nel medesimo cerchio o in cerchi uguali di due archi il maggiore è quello ch'è sotteso da una corda maggiore; come si voleva dimostrare.

Qui gli archi sonosi supposti minori entrambi della semicirconferenza; lo stesso avverrebbe se uno ne fosse maggiore, l'altro minore, fino a tanto però che quella parte onde il maggiore differisce dalla circonferenza sia maggiore dell'altro; così l'arco AKH maggiore della semicirconferenza è maggiore dell'altro AMD minore della semicirconferenza, o la corda AH è maggiore della corda AD; ciò avviene perchè l'arco AMH, onde AKH differisce dalla circonferenza è maggiore di AMD; al contrario poi l'arco AKD maggiore della semicirconferenza è maggiore dell'arco AMH minore della semicirconferenza e intanto la corda AD è minore di AH; ciò avviene perchè l'arco AMD, onde AKD differisce dalla circonferenza è minore dell'altro AMH.

Se poi i due archi fossero entrambi maggiori della semicirconferenza, allora sarebbe sempre l'arco maggiore sotteso dalla corda minore, come si vede paragonando i due archi AKD, AKH.

PROPOSIZIONE VI. — *TEOREMA.*

Il raggio perpendicolare ad una corda divide questa corda in due parti uguali, come pure l'arco sotteso.

Sia una corda qualunque AB (fig. 51) in un cerchio AHB; io dico che il raggio CG perpendicolare a questa corda divide per metà tanto la corda AB, quanto l'arco sotteso AGB, cioè dico che la retta AD = DB e l'arco AG = GB.

Si tirino i raggi AC, CB; questi raggi sono due obblique uguali rispetto alla perpendicolare CD; esse dunque si allontanano ugualmente da questa perpendicolare (17, 1); quindi AD = DB.

In secondo luogo, essendosi dimostrato AD = DB, CG è la perpendicolare ad AB elevata dal suo punto di mezzo D; dunque ciascun punto di questa perpendicolare sarà ugualmente distante dalle due estremità A e B (18, 1); dunque la distanza AG = GB. Ma se la corda AG è uguale alla corda GB, l'arco AC sarà uguale all'arco GB (prop. 4); dunque il raggio CG perpendicolare alla corda AB divide l'arco sotteso da questa corda in due parti uguali nel punto G.

Scolio. Adunque la retta CG adempie ad un'ora a quattro condizioni, cioè passa pel centro C, pel punto D medio della corda AB, pel punto G medio dell'arco sotteso ed è perpendicolare alla corda AB. Ma due condizioni sono necessarie e sufficienti per determinare una linea retta; dunque, date due di queste quattro condizioni, le altre due dovranno avverarsi. Laonde si potranno stabilire le proposizioni seguenti: 1.° *Il raggio tirato al punto medio di un arco divide per metà la corda di questo arco e le è perpendicolare;* 2.° *Il raggio che divide una corda per metà, le sarà pure perpendicolare, e dividerà l'arco sotteso per metà;* 3.° *La retta che congiunge il punto di mezzo di un arco col punto di mezzo della sua corda, sarà perpendicolare a questa corda e prolungata passerà pel centro;* 4.° *La perpendicolare elevata dal punto medio di una corda, prolungata passerà pel punto di mezzo dell'arco sotteso e pel centro.* 5.° *La perpendicolare abbassata dal punto di mezzo di un arco sulla sua corda, passerà pel punto medio di questa corda e pel centro.*

Ciascuna di queste cinque proposizioni potrebbe anche essere dimostrata indipendentemente dal teorema enunciato; ma noi non c' intratterremo su queste dimostrazioni, sendo esse, al pari del teorema principale che abbiamo dimostrato, di una grande facilità.

PROPOSIZIONE VII.— *TEOREMA*.

Per tre punti dati non in linea retta si può sempre far passare una circonferenza, e non ve ne si può far passare che una sola.

Siano A, B, C (fig. 52) i tre punti dati di posizione fra loro, e che non stiano in linea retta; dimostrerò prima che vi può passare una circonferenza, ed indi che non ve ne passa se non una sola.

Si congiungano AB, BC e s' immaginino dai punti D ed F medi di queste rette elevate ad esse le perpendicolari FG, DE; essendo queste perpendicolari elevate su due rette AB, BC che s' incontrano dovranno incontrarsi in un punto O (cor. 4, 21, 1). Ora questo punto O, appartenendo alla perpendicolare FG elevata dal punto di mezzo di AB è ugualmente distante dalle estremità A e B di questa retta (18, 1.); dunque la distanza OB = OC. Parimente la distanza OB = OA, appartenendo il punto O anche alla perpendicolare DE; dunque le tre distanze OA, OB, OC sono uguali fra loro; epperò è chiaro che la circonferenza descritta col centro O e con una di queste tre rette per raggio passerà pei tre punti A, B, C.

Vengo ora a dimostrare che una sola circonferenza passa per questi punti A, B, C. Se ciò mi si nieghi, supponiamo che passasse per questi tre punti una seconda circonferenza; essendo BC corda di questa nuova circonferenza, il centro, secondo la proposizione IV dello scolio del teorema antecedente, deve trovarsi sulla perpendicolare FG elevata dal punto F medio di questa corda. Per una simile ragione questo centro deve trovarsi sulla perpendicolare DE; ora queste due rette non ponno incontrarsi che in un sol punto O; dunque questa seconda circonferenza dee ave-

re necessariamente l'istesso centro O e l'istesso raggio OB che la prima; essa ne è dunque perfettamente la stessa.

Dunque *per tre punti dati non in linea retta* ec.

Corollario. Due circonferenze non possono incontrarsi in più di due punti; perchè se avessero tre punti di comune, esse formerebbero, come si è veduto, una sola e medesima circonferenza.

Scolio. Dalla proposizione dimostrata si vede che tre punti dati non in linea retta sono necessari e sufficienti per determinare una circonferenza. In generale si vedrà che tre condizioni sono necessarie e sufficienti per determinare una circonferenza; le tre condizioni più semplici, e che però si considerano prima, sono queste di tre punti dati di posizione fra loro e non in linea retta.

PROPOSIZIONE VIII. — *TEOREMA.*

Nel medesimo cerchio o in cerchi uguali le corde uguali sono ugualmente distanti dal centro; e di due corde disuguali la minore è la più lontana dal centro.

1.° Sia nel medesimo cerchio ANB (fig. 53); la corda AB = DE; dico che queste corde sono ugualmente distanti dal centro, cioè che le perpendicolari CF, CG abbassate dal centro su queste corde sono uguali fra loro.

I due triangoli rettangoli CAF, CDG hanno le ipotenuse CA, CD uguali, come raggi, il cateto AF uguale al cateto DG, come metà di cose uguali, cioè delle corde AB, DE; dunque questi triangoli sono uguali (27, 1); epperò le distanze CF, CG sono uguali. Adunque nel medesimo cerchio o in cerchi uguali due corde uguali distano ugualmente dal centro.

2.° Sia ora la corda AH maggiore della corda DF; io dico che DE dista più dal centro che la maggiore AH, cioè che la perpendicolare CG è maggiore della perpendicolare CI.

Essendo, per ipotesi, la corda AH maggiore di DE, sarà l'arco ANH maggiore di DME (prop. 5); sull'arco ANH si prenda la parte ANB = DME, si tiri la corda AB, e si abbassi su di essa la perpendicolare CF; sarà così la corda AB = DE, e quindi, per quello

che si è or ora dimostrato, la distanza CF = CG. Ora è chiaro che CF è maggiore di CO, e CO, come obbliqua è maggiore della perpendicolare CI (17, 1); dunque a più forte ragione CF > CI; ma CF = CG; dunque CG > CI. Imperò [nel medesimo cerchio, o in cerchi uguali, di due corde disuguali la minore è la più lontana dal centro, come bisognava dimostrare.

Scolio I. Le proposizioni dimostrate includono manifestamonte le reciproche: 1.° *due corde ugualmente distanti dal centro sono uguali*; 2.° *di due corde disugualmente distanti dal centro la più lontana è la minore*. Del resto queste due proposizioni potrebbono anche dimostrarsi indipendentemente.

II. Si vede chiaramente che un angolo iscritto potrebbe esser tale che il centro stesso tra i suoi lati o fuori. Ora quando un angolo iscritto sia formato da due corde uguali, il centro deve necessariamente staro fra i snoi lati; perchè queste corde essendo uguali debbono distare ugualmente dal centro, ed è facile vedero che *un punto il quale dista ugualmente dai lati di un angolo si trova sulla linea retta che divide quest' angolo per metà; e quindi fra i lati dell' angolo.*

Parimente si vede che un poligono iscritto potrebbe avere il centro nella sua superficie o fuori.

Ora il centro non può trovarsi fuori di un poligono equilatero iscritto; perchè, secondo ciò cho si è or ora veduto, esso dee trovarsi tra i lati di ciascun angolo.

PROPOSIZIONE IX. — *TEOREMA.*

La perpendicolare condotta da un punto della circonferenza sul raggio che passa per questo punto è tangente alla circonferenza, e reciprocamente la tangente a un punto qualunque della circonferenza è perpendicolare al raggio che passa per questo punto

Infatti se BD (fig. 54) è perpendicolare al raggio CA nel suo estremo A, ogni obbliqua CE è maggiore di CA (17, 1); dunque il punto E è fuori del cerchio; epperò la retta BD ha un sol punto

di comune con la circonferenza; dunque, per la definizione IX, BD è una tangente.

Reciprocamente sia BD tangente alla circonferenza; io dico che BD è perpendicolare al raggio CA, che passa pel punto di contatto A.

Infatti questa tangente BD non avendo di comune con la circonferenza che il solo punto A, ed essendo tutti gli altri punti più lontani dal centro che questo punto A, segue che il raggio CA è la retta più corta che possa condursi dal centro sulla tangente BD; essa le è dunque perpendicolare (17, 1); come bisognava dimostrare.

Scolio. Da ciò è chiaro che da un punto A su di una circonferenza non si può tirare che una sola tangente a questa circonferenza; perchè, come si è dimostrato, questa tangente deve essere perpendicolare al raggio CA; ora dal punto A non si può tirare alla stessa retta AC che una sola perpendicolare; dunque una sarà pure la tangente BD.

PROPOSIZIONE X. — *TEOREMA.*

Due seganti parallele, o una tangente ed una segante parallele, o due tangenti parallele intercettano sur una circonferenza due archi uguali.

1.° Siano le due seganti AB, DE (fig. 55) parallele; io dico che i due archi intercetti MN, QP sono fra loro uguali.

Si tiri il raggio CH perpendicolare ad AB, esso sarà pure perpendicolare alla sua parallela DE (21, 1); il punto H sarà dunque ad un'ora il punto di mezzo dell'arco MHP, e quello dell'arco NHQ (6); si avrà dunque l'arco MH = HP, e l'arco NH = HQ; e quindi sarà MH — NH = HP — HQ, cioè MN = PQ; come bisognava dimostrare.

2.° Sia ora la tangente DE (fig. 56) parallela alla segante AB; dico che gli archi intercetti NM, HP sono uguali.

Infatti tirando al punto di contatto H il raggio CH, questo sarà perpendicolare alla tangente DE (9), ed ancora alla sua parallela

AB. Ma per essere CH perpendicolare alla corda MP, H è il punto di mezzo dell'arco MHP; dunque gli archi MH, HP sono uguali fra loro

3.° Finalmente sia la tangente DE parallela alla tangente IL; dico pure che gli archi HMK, HPK sono uguali, ed allora si vede che ciascuno di essi è una semicirconferenza.

Dal punto di contatto H si tiri HC perpendicolare a DE; questa passerà pel centro (9); di più dovendo essere perpendicolare anche alla parallela IK passerà pel punto di contatto K; dunque la retta HK che unisce i due punti di contatto è un diametro; esso dunque divide la circonferenza in due parti uguali HMK, HNK; come si voleva dimostrare.

PROPOSIZIONE XI. — *TEOREMA.*

Se due circonferenze s' intersegano, la linea retta che passa pei loro centri è perpendicolare alla corda che congiunge i due punti d'intersezione e la divide per metà.

Infatti la retta AE (fig. 57) che congiunge i punti d'intersezione è visibilmente una corda comune ai due cerchi; dunque se per il punto di mezzo di questa corda si tiri ad essa la perpendicolare, questa dovrà passare pei due centri C e D (6). Ma tra due punti non passa che una sola linea retta; dunque la linea retta che passa pei centri sarà perpendicolare alla corda nel suo punto di mezzo; come bisognava dimostrare.

Qui i due centri C e D stanno dall'una parte e dall'altra della perpendicolare; ma si vede facilissimamente che lo stesso avverrebbe se i due centri stessero dalla medesima parte della corda, com'è visibile nella fig. 58.

PROPOSIZIONE XII. — *TEOREMA.*

Se la distanza dei centri è minore della somma de' raggi, e se nel tempo stesso il raggio maggiore è minore della somma del raggio minore e della distanza dei centri, le due circonferenze s'intersegheranno.

Imperocchè è chiaro che per esservi intersezione (fig. 57 e 58),

è mestieri che abbia luogo il triangolo CAD; e in questo triangolo si ha insieme CD < AC + AD e AD < AC + CD; dunque perchè le due circonferenze s' interseghino è necessario che la distanza dei centri sia minore della somma dei raggi e che nel tempo stesso il raggio maggiore sia minore della distanza dei centri e del raggio minore. Se non pure entrambe queste condizioni, ma una sola di esse mancasse, non vi sarebbe intersezione tra le due circonferenze, come si vedrà nella proposizione che segue.

PROPOSIZIONE XIII. — *TEOREMA.*

Due circonferenze che passano per un medesimo punto della retta che congiunge i loro centri, saranno tangenti in questo punto, e si toccheranno o esteriormente o interiormente secondo che la distanza de' centri è uguale alla somma de' raggi, o alla loro differenza, e reciprocamente se due circonferenze si toccano, i loro centri e il punto di contatto staranno in linea retta.

1.° Sia la distanza dei centri CD (fig. 59) uguale alla somma dei raggi CA, DA; le due circonferenze hanno, per ipotesi, di comune il punto A; io dico che non possono averne altro; perchè se avessero due punti di comune, dovrebbe essere, in virtù del teorema precedente, la distanza de' centri minore della somma de' raggi; il che sarebbe contro l'ipotesi. È poi evidente che le circonferenze si toccano esternamente.

2.° Sia ora la distanza de' centri CD (fig. 60) uguale alla differenza dei raggi DA, CA; le due circonferenze hanno, per supposizione, di comune il punto A sulla distanza de' loro centri; dico che non possono averne altro; perchè se avessero due punti di comune bisognerebbe che il raggio maggiore fosse minore della somma del raggio minore e della distanza dei centri (12); il che per la nostra supposizione non ha luogo; dunque le due circonferenze sono tangenti nel punto A, e tangenti, come è manifesto, interiormente.

Reciprocamente se due circonferenze si toccano, il punto di

contatto e i due centri stanno in linea retta. Infatti è chiaro che nel caso che si toccassero esteriormente, se il punto di contatto non istesse sulla distanza de' centri, sarebbe questa distanza minore della somma de' raggi, epperò le circonferenze s'intersegherebbero, il che è contrario alla supposizione; nel caso che si toccassero interiormente, sarebbe il raggio maggiore minore della somma del raggio minore e della distanza de' centri; dunque nell' un caso e nell'altro i due centri e il punto di contatto stanno in linea retta.

Scolio. Da ciò si vede che tutte le circonferenze, i cui centri siano allogati sulla stessa retta CD, e che passino pel medesimo punto A sono tangenti in questo punto le une alle altre; e se dal punto A si elevi AE perpendicolare a CD, questa AE è tangente comune a tutte queste circonferenze.

PROPOSIZIONE XIV. — *TEOREMA*.

Nel medesimo cerchio o in cerchi uguali angoli al centro uguali intercettano sulla circonferenza archi uguali, e reciprocamente archi uguali sono intercettati da angoli al centro uguali.

1.° Siano gli angoli al centro ACB, DCE (fig. 61) uguali, siano eziandio uguali i cerchi in cui essi sono; io dico che gli archi AB, DE, che questi angoli intercettano sulle circonferenze, sono uguali.

S' immagini sovrapposto l'angolo ACB sul suo uguale DCE, in modo che il vertice C cada in C e il lato CA su CD, così CB cadrà su CE, ed essendosi supposti uguali i due cerchi, il punto A cadrà in D e il punto B in E. È chiaro così che anche l' arco AB dovrà combaciare con l' arco DE; perchè altrimenti vi sarebbero o nell' uno o nell'altro punti disugualmente distanti dal centro; il che è impossibile, per essersi supposti uguali i due cerchi; dunque l' arco AB è uguale all' arco DE.

2.° Reciprocamente, suppongasi l'arco AB uguale all'arco DE, essendo anche uguali i due cerchi; io dico che l'angolo ACB sarà uguale all'angolo DCE. Perocchè, se ciò mi si nieghi siano disu-

guali questi due angoli, e sia ACB il maggiore; prendasi dall'angolo ACB la parte ACI uguale al minore DCE; sarà, per ciò che si è ora dimostrato, AI = DE; ma per ipotesi gli archi AB, DE sono uguali; dunque la parte AI sarebbe uguale al tutto AB; ch'è un assurdo; dunque gli angoli ACB, DCE sono uguali.

Scolio. Dunque due diametri perpendicolari AC, BD (fig. 157) dividono la circonferenza in quattro parti uguali. Perchè, essendo uguali gli angoli AOB, BOC, COD, DOA, come retti, sono anche uguali gli archi AB, BC, CD AD, ch'essi intercettano. Alla quarta parte della circonferenza si suol dare il nome di *quadrante*.

PROPOSIZIONE XV. — *TEOREMA.*

Nel medesimo cerchio o in cerchi uguali gli angoli al centro stanno fra loro nello stesso rapporto che gli archi ch'essi intercettano sulle circonferenze, e reciprocamente gli archi come gli angoli.

1.° Supponiamo da prima che gli angoli siano commensurabili. Per esempio, i due angoli ACB, DCE (fig. 62) al centro, in cerchi uguali, stiano come 7 a 4; dico che altresì gli archi AB, DE stanno fra loro come 7 a 4.

In fatti se gli angoli ACB, DCE stanno fra loro come 7 a 4, un terzo angolo, che servirà loro di comune misura, sarà contenuto 7 volte esattamente in ACB, e 4 in DCE. Essendo così gli angoli parziali ACm, mCn, nCp ec., DCx, xCy, ec., uguali gli archi parziali Am, mn, np, Dx, xy ec., saranno medesimamente uguali, in virtù del teorema precedente; dunque i due archi AB, DE, contenenti il primo 7, il secondo 4 di questi archi parziali, stanno fra loro come 7 a 4.

Reciprocamente, suppongasi che gli archi AB, DE, essendo sempre uguali i due cerchi, stiano come 7 a 4, cioè che un terzo arco Am, sia contenuto 7 volte nel primo e 4 nel secondo; essendo così uguali gli archi parziali Am, mn ec., Dx, xy, ec., secondo la proposizione precedente, saranno anche uguali gli angoli parziali ACm, mCn, ec., DCx, xCy, ec., e de' due angoli ACB, DCE il

primo conterrà 7, il secondo 4 di questi angoli parziali; cioè questi due angoli staranno fra loro come 7 a 4.

Ora è chiaro che il ragionamento sarebbe precisamente lo stesso, se in luogo de'due numeri 7 e 4, si avessero altri numeri qualunque; resta dunque dimostrato che nel medesimo cerchio o in cerchi uguali se gli angoli al centro sono commensurabili, ch'è quanto dire stanno fra loro come due numeri interi, gli archi che essi intercettano sulle circonferenze stanno medesimamente fra loro come questi due numeri interi, e reciprocamente.

2.° Passiamo ora al caso in cui i due angoli ACB (fig. 63), ACD siano incommensurabili; dico che sarà pure

angolo ACB : ACD : : arco AB : AD.

Per comodo della dimostrazione, se gli angoli sono in due cerchi uguali, si riducano entrambi nello stesso cerchio, col prendere dal maggiore ACB la parte ACD uguale al minore.

Ora se si nieghi che sia vera la proporzione enunciata, rimanendo gli stessi i tre primi termini, il quarto, arco AD, dovrà essere o maggiore o minore, supponiamo che sia arco AO $>$ AD; si avrà

angolo ACB : ACD : : arco AB : AO.

S'immagini ora diviso l'arco AB in un tal numero di parti uguali, che ciascuna parte sia minore dell'arco DO, vi sarà così almeno un punto I di divisione tra i punti D ed O; congiungasi CI; gli archi AB, AI staranno fra loro come due numeri interi, epperò, pel caso antecedente, si avrà la proporzione:

angolo ACB : ACI : : arco AB : AI.

Paragonando questa proporzione con la precedente, si vede ch'esse hanno gli stessi antecedenti; dunque i conseguenti sono proporzionali, e sarà

angolo ACD : ACI : : arco AO : AI.

Ma l'arco AO si è preso maggiore dell'arco AI; bisognerebbe dunque, perchè la proporzione fosse vera, che l'angolo ACD fosse medesimamente maggiore dell'angolo ACI; ora per lo contrario n'è minore; dunque è impossibile che l'angolo ACB stia all'angolo ACD come l'arco AB sta ad arco maggiore di AD.

Si dimostrerebbe con un ragionamento intieramente simile che il quarto termine della proporzione non può essere minore di AD; dunque esso è esattamente AD; epperò è vera la proporzione

angolo ACB : ACD : : arco AB : AD.

La reciproca di questa proporzione è manifestamente inclusa in essa; perchè se arco AB non istesse ad arco AD come angolo ACB ad angolo ACD, il quarto termine di questa proporzione dovrebbe essere un angolo maggiore o minore di ACD; ma così starebbe l'angolo ACB a questo nuovo angolo come l'arco AB all'arco AD minore o maggiore del nuovo angolo; ciò si è dimostrato impossibile; duuque il quarto termine della proporzione è esattamente l'angolo ACD.

Corollario. Poichè l'angolo al centro ha tal relazione con l'arco intercettato fra i suoi lati, che quando l'uno aumenta o diminuisce in un certo rapporto, l'altro aumenta o diminuisce nello stesso rapporto, si può bene stabilire l'una di queste grandezze per misura dell'altra; così noi d'ora innanzi prenderemo l'arco AB per la misura dell'angolo ACB. Bisogna solamente osservare nel paragonare gli angoli fra loro, che gli archi i quali servono loro di misura debbono essere descritti con raggio uguali; perchè questa condizione si è veduta entrare nelle ipotesi di tutte le proposizioni antecedenti.

Scolio I. Sembra in verità più naturale di misurare una quantità per un'altra dello stesso genere, e su questo principio converrebbe riferire tutti gli angoli all'angolo retto: così essendo l'angolo retto l'unità di misura, un angolo acuto sarebbe espresso da un numero compreso tra 0 ed 1, e un angolo ottuso da un numero tra 1 e 2. Ma questa maniera di esprimere gli angoli non sarebbe la più comoda nell'uso; e si è trovato molto più semplice di misurarli per gli archi di conferenza uguali, a cagione della

facilità grande di fare archi uguali ad archi dati, e per molte altre ragioni, che qui non occorre di menzionare. Del resto, se la misura degli angoli per gli archi di cerchio è in certo modo indiretta, non è però meno facile di ottenere per mezzo di questi archi la misura diretta ed assoluta; perocchè se paragonasi l'arco che serve di misura ad un angolo con la quarta parte della circonferenza, si avrà così il rapporto dell'angolo dato all'angolo retto, cioè la misura assoluta di esso angolo dato.

Ora per misurare gli archi ed esprimerc così in numeri il loro rapporto si divide il quadrante in 90 parti uguali che si chiamano *gradi*; così tutta la circonferenza è divisa in 360 gradi; ciascun grado si è diviso in 60 *minuti*, ciascun minuto in 60 *secondi*; così quando un arco che misura un dato angolo sia, per esempio, di 38 gradi, 27 minuti e 4 secondi, che si scrive così: $38° 27' 4''$, si dice anche che l'angolo è di $38° 27' 4''$; e in questa guisa si viene a conoscere la grandezza assoluta di esso angolo; perchè come $38° 27' 4''$ sta a $90°$ così questo angolo sta all'angolo retto.

Ma si suole anche dividere il quadrante in 100 gradi, il grado in 100 minuti ed il minuto in 100 secondi. Questa divisione è più regolare e conforme al sistema metrico decimale; ma pure il lungo uso che si è fatto della prima e la quantità grande de' libri in cui i calcoli trovansi eseguiti secondo di questa divisione, han fatto sì ch'ella non siasi intieramente abolita, anzi si trovi più generalmente usata che la seconda.

Tutto ciò che è stato dimostrato nelle due proposizioni precedenti per il paragone degli angoli cogli archi, ha medesimamente luogo per il paragone dei settori cogli archi; perchè i settori sono uguali quando i loro angoli sono uguali, e generalmente essi sono proporzionali a questi angoli; dunque *due settori ACB, ACD presi nel medesimo cerchio o in cerchi uguali stanno fra loro come gli archi IB, AD, basi di questi stessi settori.*

Da ciò si vede che gli archi di cerchio che servono di misura agli angoli possono anche servire di misura ai differenti settori del medesimo cerchio o di cerchi uguali.

II. Si noti che per dimostrare che qualunque sia il rapporto degli angoli al centro nel medesimo cerchio o in cerchi uguali gli archi ch'essi intercettano sulle circonferenze stanno nel mede-

simo rapporto, si sono dovuti prima trattare i casi particolari in cui questi angoli siano uguali e commensurabili. Una tal maniera di partire dal più particolare per giungere al più generale è in taluni casi indispensabile, e si vedrà sovente ripetuta in appresso. Alcune volte poi si può subito dimostrare il caso generale, ed allora i particolari vi sono contenuti come conseguenze.

PROPOSIZIONE XVI — *TEOREMA.*

L'angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.

Tre casi possono darsi: 1° che il centro C (fig. 64) sia sopra un lato dell'angolo iscritto BAE; 2° che sia fra i lati, come nell'angolo BAD; 3° che stia fuori di questi lati, come nell'angolo BID (fig. 65).

1.° Nel primo caso tirando il raggio BC, si ha del triangolo ABC l'angolo esterno BCE uguale alla somma de' due interni ed opposti BAC, ABC (24, 1); ma nel triangolo ABC, AC=BC, come raggi; dunque l'angolo BAC = ABC, (13, 1); epperò l'angolo BCE è doppio dell'angolo BAC. Ma l'angolo al centro BCE, in virtù del teorema precedente, ha per misura l'arco BE; dunque l'angolo BAE, che si è dimostrato metà di BCE, ha per misura la metà dell'arco BE.

2.° Sia ora il centro C fra i lati dell'angolo iscritto BAD; si tiri il diametro AE. L'angolo BAE, essendo il centro sul suo lato AE, ha per misura, secondo ciò che si è or ora dimostrato, la metà dell'arco BE; e parimente l'angolo EAD ha per misura la metà dell'arco ED; dunque l'angolo BAD, somma dei due BAE, EAD ha per misura la metà dell'arco BD, somma de' due BE, ED.

3.° In ultimo sia il centro C (fig. 65) fuori dell'angolo BAD; si tiri il diametro AE. L'angolo BAE ha per misura, secondo il primo caso, la metà dell'arco BE; l'angolo DAE, ha per misura la metà dell'arco DE; dunque l'angolo BAD, differenza de' due BAE, DAE, ha per misura la metà dell'arco BD, differenza de'due BE, DE.

Dunque ogni angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso tra i suoi lati.

Corollario I. Tutti gli angoli **BAC**, **BDC** ec., (fig. 66) iscritti nel medesimo segmento sono uguali; perch'essi han tutti per misura la metà dello stesso arco **BOC**.

II. Ogni angolo **BAD** (fig. 67) iscritto nel semicerchio è un angolo retto; poichè esso ha per misura la metà della semicirconferenza **BOD**, cioè il quadrante che misura appunto l'angolo retto.

Ma questa proposizione potrebbe dimostrarsi anche indipendentemente; e noi non taceremo questa dimostrazione, perchè ella ci fa vedere come la proposizione enunciata procede dalla natura stessa del cerchio, cioè dall' uguaglianza dei raggi.

Si tiri il raggio **AC**, il triangolo **BAC** è isoscele, quindi l'angolo **BAC** = **ABC**; il triangolo **CAD** è medesimamente isoscele, dunque l' angolo **CAD** = **ADC**; dunque **BAC** + **CAD** o **BAD**=**ABD** + **ADB**. Ma se i due angoli **B** e **D** del triangolo **ABD** valgono insieme il terzo **BAD**, i tre angoli del triangolo varranno due volte l' angolo **BAD**; essi d' altra parte equivalgono a due angoli retti; dunque l' angolo **BAD** è un angolo retto; come bisognava dimostrare.

III. Ogni angolo **BAC** (fig. 66) iscritto in un segmento maggiore del semicerchio, è un angolo acuto; perchè esso ha per misura la metà dell' arco **BOC** minore della semicirconferenza, cioè ha per misura un arco minore del quadrante.

E ogni angolo **BOC** iscritto in un segmento minore del semicerchio è un angolo ottuso; perchè esso ha per misura la metà dell' arco **BDC** maggiore della semicirconferenza, cioè ha per misura un arco maggiore del quadrante.

IV. Gli angoli opposti **A** e **C** (fig. 68), di un quadrilatero iscritto **ABCD** valgono insieme due angoli retti; perocchè l' angolo **BAD** ha per misura la metà dell' arco **BCD**; l' angolo **BCD** ha per misura la metà dell' arco **BAD**; dunque i due angoli **BAD**, **BCD**, presi insieme, hanno per misura la metà della circonferenza; dunque la loro somma è uguale a quella di due angoli retti.

Da ciò si vede che in un cerchio non potrebbe essere iscritto un romboide, cioè un quadrilatero che avesse solamente i lati opposti paralleli senza avere nè tutti i lati uguali nè gli angoli retti; nè vi potrebbe essere iscritta una losanga cioè un parallelogrammo che avesse solamente tutti i lati uguali. Infatti in questi quadrilateri essendo gli angoli opposti uguali, per essersi dimostrata

la loro somma uguale a due retti, ciascuno di questi due angoli dovrebbe essere retto; il che non avviene nè nel romboide nè nella losanga.

Perchè dunque un parallelogrammo sia iscritto in un cerchio conviene che sia un rettangolo; e siccome l'angolo retto è iscritto nel semicerchio, le sue due diagonali sono due diametri.

Per conseguenza in un cerchio potrebbe anche essere iscritto un quadrato.

Scolio. Questa proposizione e la precedente possono essere considerate come casi particolari della generale che verremo esponendo qui appresso, e che non può dimostrarsi se non dopo dimostrate queste due particolari.

PROPOSIZIONE XVII. — *TEOREMA*.

L'angolo formato da due seganti ha per misura la semidifferenza dei due archi intercettati fra i suoi lati, l'uno concavo, l'altro convesso, e l'angolo formato da due corde ha per misura la semisomma de' due archi opposti, che intercettano i lati di questo angolo.

1.° Sia l'angolo BOC (fig. 131) formato dalle due seganti BO, OC; dico che quest'angolo ha per misura la semidifferenza dei due archi AD, BC, cioè ha per misura un arco uguale a $\frac{BC-AD}{2}$.

Dal punto A si tiri AM parallela ad OC; l'angolo esterno BAM sarà uguale all'interno ed opposto O. Ora l'angolo iscritto BAM, in virtù del teorema precedente, ha per misura la metà dell'arco BM; dunque la metà di questo arco BM sarà pure la misura dell'angolo BOC. Ma l'arco $BM=BC-MC$, ed $MC=AD$, perchè sono compresi fra le due parallele OC, AM (prop. 10); dunque $BM=BC-AD$; e così l'angolo BOC ha per misura $\frac{BC-AD}{2}$.

2.° Sia l'angolo AOD (fig. 130) formato dalle due corde AB, CD; dico che esso ha per misura la semisomma de' due archi opposti AD, CB compresi fra i suoi lati, cioè ha per misura un angolo uguale ad $\frac{AD+CB}{2}$.

Si tiri **BM** parallela a **CD**; sarà l' angolo **AOD** uguale all'interno ed opposto **OBM**; ma l' angolo **ABM**, come iscritto ha per misura la metà dell'arco **AM**; dunque anche l' angolo **AOD** avrà per misura la metà dell' arco **AM**. Ora l' arco $AM = AD + DM$, e $DM = CB$, perchè compresi fra le parallele **BM**, **CD**; dunque $AM = AD + CB$; epperò l' angolo **AOD** ha per misura l' arco $\frac{AD+CB}{2}$.

Scolio. Quando il punto **O** fosse il centro, allora i due angoli verticali uguali **AOD**, **COB** essendo al centro, gli archi **AD**, **CB** sarebbero medesimamente uguali, e quindi la loro semisomma è uguale al solo arco **AD**. Quando poi il punto **O** stesse sulla circonferenza allora uno di questi due archi si distrugge e la loro semisomma riducesi alla metà di un solo **AD**. E così vedesi come le due proposizioni precedenti sono due casi particolari della presente.

PROPOSIZIONE XVIII. — *TEOREMA.*

L' angolo formato da una tangente e da una corda ha per misura la metà dell' arco compreso fra i suoi lati.

Sia la tangente **BE** (fig. 69) e la corda **AC**, che formino un angolo **BAC**; si vede che perciò è necessario che la corda sia tirata dal punto di contatto **A**; dico che questo angolo ha per misura la metà dell' arco **AMC**, compreso fra i suoi lati.

Dal punto di contatto **A** si meni il diametro **AD**; l' angolo **BAD** è retto (prop. 9); esso ha dunque per misura la metà della semicirconferenza **AMD**; l' angolo iscritto **DAC** ha per misura la metà dell' arco **DC**; dunque $BAD + DAC$, ovvero **BAC** ha per misura la metà di **AMD** più la metà di **DC**, cioè la metà di tutto l'arco **AMC**.

Osservando che l' angolo $CAE = DAE - DAC$, si proverebbe similmente che l' angolo **CAE** ha per misura la metà dell' arco **AC**, compreso fra i suoi lati.

Scolio. Si noti che l' angolo **CAE** è uguale ad ogni angolo iscritto nel segmento **AMC**; perchè entrambi hanno per misura la metà dello stesso arco **AC**.

PROBLEMI RELATIVI AI DUE PRIMI LIBRI

Abbiamo già detto che la linea retta e la circonferenza, per essere elle uniformi da ogni parte, epperò facili le proprietà loro, sono le sole linee di cui si occupi la geometria elementare. Queste due linee, come ogni altra, suppongonsi nel campo astratto e speculativo della scienza come esenti al tutto da larghezza e profondità e consistenti nella sola lunghezza. Ma negli oggetti della natura le tre dimensioni dell'estensione trovansi sempre riunite insieme, perocchè ivi non si veggon sempre se non corpi, e non mai superficie o lineo isolate, nel senso geometrico di queste parole. Il solo pensiero è quello che astrae dai corpi una dimensione o due, e forma così le idee di superficie e di linea.

Adunque quando si vedrà disegnata una linea, questa intanto è tenuta come tale e prende questo nome, in quanto che non si vuol considerare in essa se non la quantità o la forma della sua lunghezza, indipendentemente dalla larghezza e profondità che questa linea, diciam così, naturale dee necessariamente avere. Allora s' intende parlare del contorno estremo di essa linea naturale, il quale contorno nel pensiero è dotato della sola lunghezza, ma nella pratica non potrebbe essere disgiunto dal corpo deputato a mostrarne, come abbiam detto, la quantità o la forma; ed è appunto perchè s' intende parlare di questo estremo contorno che nel tracciare una linea si procura, per ottenere la massima precisione, ch' ella sia quanto men larga si possa.

Gl'istrumenti de' quali si fa uso per descrivere la linea retta e la circonferenza sono la *riga* e il *compasso*, troppo noti e comuni perchè non occorra ch' io esponga qui la maniera di adoperarli. I mezzi onde questi istrumenti siano ben precisi e perfetti per adempiere convenientemente all' uso loro sono forniti dalla meccanica pratica e non entran punto nel campo della geometria.

Ora l' obbietto dei problemi della geometria elementare si è quello d' insegnare la maniera onde servirsi de' duo detti istrumenti a fine di trovare alcune parti incognite di una certa figura della quale siano date le altre parti. A questo scopo conducono facil-

mente le varie proprietà conosciute in essa geometria elementare circa la linea retta e il cerchio. [1]

È chiaro da ciò che i due problemi primitivi per mezzo de' quali si risolvono tutti gli altri sono questi due: 1° *da un punto ad un altro condurre una linea retta*; 2° *con un dato centro ed un dato raggio descrivere una circonferenza*. Questi due problemi, la cui costruzione si esegue colla riga e col compasso, per la estrema loro facilità sono per rispetto agli altri problemi quel medesimo che sono gli assiomi per rispetto ai teoremi.

Chi abbia intera notizia dei teoremi geometrici dovrà prima di accingersi alla soluzione di un problema, porre ben mente alle condizioni date, per vedere se esso problema sia possibile, o non, o sia indeterminato. Infatti per determinare un oggetto geometrico debbono essere date tante condizioni quante sono necessarie e sufficienti, nè più, nè meno; se se ne diano più il problema è impossibile, se meno indeterminato. Così è chiaro che quando si daranno due condizioni qualunque per determinare o di posizione o

[1] Il compasso è un istrumento molto più preciso nell' uso che la riga. Infatti da prima è difficilissimo di fare che la riga sia rigorosamente dritta in tutta la sua lunghezza; dipoi si vede chiaramente che la traccia di una linea retta menata lunghesso la riga porta con sè un' incertezza di parallelismo nel movimento dell' asse della punta che marca, o di applicazione perfetta di essa punta alla estremità della riga. Al contrario il compasso è esente da tali imperfezioni; perchè in esso basta che l'apertura sia ben fissa, e le due punte bene aguzze, il che si può sempre ottenere con grandissima esattezza. Sarebbe dunque di una immensa utilità agli artisti se i problemi della geometria elementare potessero tutti risolversi coll' uso del solo compasso. Ora un sì momentoso servigio è stato renduto alla scienza dal sommo geometra italiano Mascheroni con una sua opera cui è titolo *Geometria del compasso*. La maraviglia è che non solo vedesi esclusa dell' intutto la riga dalla determinazione dei punti che si voglion trovare in un problema, ma ancora che le costruzioni sono in grandissima parte molto più semplici di quelle che servono a risolvere questi problemi coll' uso di entrambi gl' istrumenti. Non è a dire l'utilità che offrono precipuamente le risoluzioni del Mascheroni nella costruzione degl' istrumenti di astronomia.

Ora si potrebbe domandare perchè mai nella geometria elementare non si dànno le costruzioni della *geometria del compasso*, ma sì quelle in cui si dee fare anche uso della riga. La risposta è che in quell' opera si richiede già la cognizione di tutta la geometria elementare; onde ella non può offrirsi all' intelligenza dei principianti.

di grandezza una linea retta, il problema è possibile, come, per esempio, se si volesse tirare una linea retta che passi per un dato punto e faccia un determinato angolo con una retta data. Quando le condizioni sono più di due il problema è impossibile; si vede, per esempio, che sarebbe impossibile di tirare una retta che passi per due punti dati e sia parallela ad una data retta. Finalmente se si desse una sola condizione il problema sarebbe indeterminato; così è chiaro che se si cercasse una linea retta la quale fosse parallela ad una retta data, la retta cercata non si potrebbe determinare, perchè alla retta data si ponno menare infinite parallele dagl' infiniti punti che sono fuori di essa. Sarebbe medesimamente indeterminato il problema se si cercasse una retta che passi per un punto dato, perchè da questo punto si ponno tirare infinite rette nello spazio.

I problemi geometrici che escono dagli elementi ed entrano nel campo della geometria sublime, sono quelli che si costruiscono per mezzo delle proprietà di linee differenti dalla retta e dalla circonferenza, e ne' quali perciò si fa uso d' istrumenti differenti dalla riga e dal compasso, e che servono a descrivere queste altre linee.

I problemi che verremo risolvendo qui appresso li abbiamo detti relativi ai due primi libri, perchè le costruzioni loro procedono appunto dai teoremi dimostrati in cotesti due libri.

PROBLEMA PRIMO

Dividere una data linea retta AB in due parti uguali.

Dai punti A e B (fig. 70), come centri, con un raggio maggiore della metà di AB si descrivano due archi i quali s'intersegheranno in due punti E ed E l' uno al di sopra l'altro al di sotto della retta AB, per essersi fatta la distanza de' centri minore della somma dei raggi. Si congiungano questi due punti E ed E; la congiungente dividerà la retta data AB in due parti uguali nel punto C; perocchè, per costruzione, ciascuno de' due punti E ed E dista ugualmente dalle estremità della retta AB; dunque la retta che li congiunge sarà perpendicolare ad AB nel suo punto di mezzo (18, 1).

Scolio I. Si vede chiaramente che ciascuno de' due punti E ed E poteva determinarsi ugualmente distante dalle estremità della retta AB prendendo al di sopra un raggio, e al di sotto un altro, purchè fossero entrambi maggiori della metà di AB. Ma noi non abbiamo voluto far cangiare l' apertura del compasso per la semplicità e brevità maggiore, ch' è d' uopo sempre cercare in un problema.

II. Dividendo ancora per metà ciascuna parte AC, CB si verrebbe a dividere tutta la AB in 4 parti uguali; e così dividendo ancora per metà ciascuna quarta parte, la si viene a dividere in 8 parti uguali. Laonde la costruzione indicata serve a dividere una data retta AB in 2, 4, 8, 16, 32 ec. parti uguali.

PROBLEMA II

Da un punto A dato sur una linea retta BC elevare la perpendicolare a questa retta.

Si prendano i punti B e C (fig. 71) ad uguale distanza dal punto A, il che fassi prendendo per centro A e descrivendo con un raggio qualunque una circonferenza che incontri BC ne' due punti B e C; indi presi i punti B e C per centri, con un raggio maggiore di BA si descrivano due archi i quali, com'è chiaro, si toglieranno in un punto D; in fine si congiunga AD, ch' io dico essere la perpendicolare cercata.

In fatti il punto D essendo, per costruzione, ugualmente distante dalle due estremità B e C deve trovarsi sulla perpendicolare elevata dal punto di mezzo di BC; ma A, per costruzione, è questo punto medio, e tra due punti non vi passa che una sola linea retta; dunque la congiungente AD è appunto perpendicolare ad AC.

Scolio. Se mai occorresse di elevare da un estremo A (fig. 67) della retta AB la perpendicolare a questa retta senza prolungarla, è chiaro che non si potrebbe più fare uso della costruzione indicata; bensì potrebbesi operare nel modo seguente. Preso un punto C ad arbitrio fuori della retta data AB, si descriverebbe col centro C e col raggio CA una circonferenza che intersegherebbe

la retta data in un punto B; indi dal punto B si tirerebbe il diametro BD, e si congiungerebbe AD, che sarebbe la perpendicolare richiesta; perchè è manifesto che l'angolo BAD, come iscritto nel semicerchio, sarebbe retto.

La stessa costruzione serve a fare un angolo retto BAD in un dato punto A sopra una retta data BC.

PROBLEMA III

Da un punto A, dato fuori della retta BD, abbassare la perpendicolare su questa retta.

Col punto A (fig. 72), come centro, e con un raggio sufficientemente grande, si descriva un arco il quale incontri la retta BD in due punti B e D; si prenda poi il punto E ad uguale distanza dalle due estremità B e D, e si congiunga AE, che sarà la perpendicolare richiesta.

Imperocchè i due punti A ed E sono ugualmente distanti dai punti B e D; dunque la linea retta AE è perpendicolare sul punto di mezzo di BD.

PROBLEMA IV

Col punto A, come vertice, dato su di una retta AB, come un lato, costruire un angolo uguale ad un angolo dato K.

Dal vertice K (fig. 73), come centro, e con un raggio ad arbitrio, si descriva l'arco IL terminato ai due lati dell'angolo; dal punto A, come centro, e con un raggio AB uguale a KI, si descriva l'arco indefinito BO; si prenda poi un raggio uguale alla corda LI; dal punto B, come centro, e con questo raggio LI, si descriva un arco il quale taglierà in un punto D l'arco indefinito BO; in ultimo si tiri AD; io dico che l'angolo DAB sarà uguale all'angolo dato K.

Imperocchè gli archi BD, LI, hanno raggi uguali e corde uguali; essi sono per conseguenza uguali (4, 2); dunque l'angolo BAD = IKL (14, 2).

Scolio. In questa costruzione è pure compreso il caso, in cui l'angolo dato sia retto; ma allora non si farà uso di essa; bensì di quella indicata nel problema II, la quale è da preferire per la sua maggiore semplicità.

PROBLEMA V

Dividere un arco e quindi un angolo dato per metà.

1.° Sia da dividersi l'arco dato AB (fig. 74) in due parti uguali. Dai punti A e B, come centri, e con un medesimo raggio, si descrivano due archi i quali si taglieranno in un punto D; per il punto D e per il centro C si tiri CD che taglierà l'arco AB in due parti uguali al punto E (6, 2).

Se poi non fosse dato il centro C, si determinerebbero due punti qualunque ad ugual distanza dalle estremità del dato arco, e la retta che passa per questi due punti dividerebbe l'arco per metà.

2.° Abbiasi ora a dividere per metà l'angolo ACB. Dal vertice C, come centro, e con un raggio ad arbitrio si descriva l'arco AB; indi si divida questo arco per metà nel modo or ora indicato. Essendo nel medesimo cerchio l'arco AE=EB, è chiaro che la retta CD dividerà in due parti uguali l'angolo ACB.

Scolio I. Colla medesima costruzione si può dividere ciascuno de' due archi AE, EB per metà; e così con successive bisezioni si dividerà un arco o un angolo dato in 4, 8, 16, 32 ec. parti uguali.

II. Il dividere un arco e quindi un angolo in tre parti uguali è un problema che non si può risolvere colla geometria elementare, cioè colla riga e col compasso. Esporrò intanto quale dovrebbe essere la costruzione, a fine che si comprenda dove consista l'impossibilità. Sia da dividersi in tre parti uguali l'angolo qualunque DCB (fig. 136). Preso per centro il vertice C si descriva con un raggio qualunque il cerchio MDB; s'immagini tirata DQ che faccia col lato BC prolungato l'angolo $Q=\frac{1}{3}$ DCB. Nel triangolo QCD si ha l'angolo esterno DCB=QDC+DQC; ma DQC$=\frac{1}{3}$ DCB; dunque QDC $=\frac{2}{3}$ DCB=2DQC. Ora si tiri il raggio MC; nel

triangolo isoscele MCD si ha l' angolo MDC=DMC; ma l' angolo esterno DMC=MQC+MCQ; dunque anche l'angolo MDC=MQC+MCQ; ora si è veduto che MDC=2MQC; dunque l'angolo MQC = MCQ; ma MQC$=\frac{1}{3}$ DCB; quindi anche l' angolo MCQ $=\frac{1}{3}$DCB; e così l' arco AM è la terza parte dell' arco DB. Ora si osservi che nel triangolo QMC, per essere l' angolo MQC=MCQ, si ha il lato MQ=MC; dunque per fare l' angolo Q $=\frac{1}{3}$ DCB, su di che poggia, come abbiamo veduto, la costruzione, basterebbe saper tirare la retta DQ in modo che la parte esterna MQ sia uguale al raggio; ora questo è appunto ciò che non sa farsi colla geometria elementare cioè colla riga e col compasso.

PROBLEMA VI

Da un punto dato A condurre la parallela alla linea retta data BC.

Dal punto A (fig. 75), come centro, e con un raggio sufficientemente grande, si descriva l'arco indefinito EO; dal punto E, come centro, e collo stesso raggio, si descriva l'arco AF; si prenda l'arco ED = AF, ed in ultimo si tiri AD che sarà la parallela cercata.

Perocchè, congiungendo AE, si vede che gli angoli alterni AEF, EAD, intercettando gli archi uguali AF, ED di uguali raggi, sono uguali; dunque le rette AD, BC sono parallele.

PROBLEMA VII

Dati due angoli di un triangolo A e B, trovare il terzo.

Prima di tutto nel dire che i due angoli A e B (fig. 76) appartengono ad un triangolo, s'include che la loro somma è minore di due retti.

Si tiri la linea retta indefinita DEF, e facciasi al punto E, con questa retta per un lato, l' angolo DEC=A, e l' angolo CEH=B; il rimanente angolo HEF sarà il terzo angolo richiesto; perocchè questi tre angoli equivalgono insieme a due angoli retti.

PROBLEMA VIII

Dati due lati B e C di un triangolo e l'angolo A ch'essi comprendono, costruire il triangolo.

Tirata la linea retta indefinita DE (fig. 77), facciasi al punto D, l'angolo EDF uguale all'angolo dato A; si prenda in seguito DG = B, DH = C, e si tiri GH; è chiaro che DGH sarà il triangolo cercato.

PROBLEMA IX

Dato un lato e due angoli di un triangolo costruire il triangolo.

I due angoli dati saranno o entrambi adiacenti al lato dato, o l'uno adiacente, l'altro opposto; in quest'ultimo caso si trovi il terzo angolo nel modo indicato nel problema VII; si avranno così i due angoli adiacenti; onde il problema si riduce sempre al primo caso, nel quale la costruzione è questa.

Si tiri la linea retta DE (fig. 78) uguale al lato dato, e facciasi al punto D l'angolo EDF uguale all'uno degli angoli adiacenti; e al punto E l'angolo DEG uguale all'altro; le due rette DF, EG si taglieranno in un punto H, e DEH sarà manifestamente il triangolo richiesto.

Scolio. È quasi superfluo l'agginngere che perchè il problema sia possibile fa d'uopo che la somma dei due angoli dati sia minore di due retti, il che s'include tacitamente nel dire ch'essi due angoli appartengono ad un triangolo.

PROBLEMA X

Costruire un triangolo, del quale siano dati i tre lati A, B, C.

Tirisi DE (fig. 79) uguale al lato A; dal punto E, come centro, e con un raggio uguale al secondo lato B, descrivasi un arco; da

punto D, come centro, e con un raggio uguale al terzo lato C, si descriva un altro arco, il quale taglierà il secondo in un punto F; congiungansi DF, EF, e DEF sarà il triangolo cercato.

Scolio I. Risulta da ciò che si è detto nella proposizione VIII del primo libro, che se uno de' lati dati non sia minore della somma degli altri due il problema non sarebbe possibile; e si vede infatti dalla costruzione indicata che allora i due archi non si taglierebbero, perchè la distanza dei centri non sarebbe minore della somma de' raggi. Ma la soluzione sarà sempre possibile se la somma di due lati, presi come si voglia, è maggiore del terzo; o, che vale lo stesso, quando un lato qualunque è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

II. Se i tre lati dati siano tutti e tre disuguali fra loro il triangolo è sceleno: se due soli siano uguali è isoscele; se tutti uguali è equilatero. Nel caso del triangolo equilatero si dà una sola linea retta e si dice su questa linea retta costruire il triangolo equilatero, perchè allora si sa come dee procedere la costruzione.

PROBLEMA XI

Dati due lati A e B di un triangolo e l' angolo C opposto al lato B, costruire il triangolo.

Si debbono qui considerare due casi: 1° quando l' angolo C è retto od ottuso; 2° quando esso sia acuto.

1.° Quando C sia retto od ottuso (fig. 80), si faccia l'angolo EDF uguale all'angolo C; prendasi DE=A, dal punto E, come centro, e con un raggio uguale al lato dato B, descrivasi un arco che taglierà in punto F la linea retta DF; tirisi EF, e DEF sarà visibilmente il triangolo cercato

Fa d'uopo in questo primo caso che il lato B sia maggiore del lato A, perocchè l' angolo C essendo retto od ottuso è il massimo angolo del triangolo; epperò il lato apposto deve essere medesimamente il massimo.

2.° Sia ora acuto l' angolo C (fig. 81). È chiaro che qui il lato B può essere maggiore o minore dell'altro A. Ne sia primamente maggiore. Si farà la medesima costruzione di prima, e DEF è il triangolo richiesto.

Secondamente ne sia maggiore (fig. 82). È chiaro che, facendo la medesima costruzione, l'arco descritto col centro E e col raggio EF=B, taglierà il lato DF in due punti F e G situati dalla stessa parte di D; vi saranno dunque così due triangoli DEF, DEG, i quali soddisferanno entrambi al problema.

Scolio I. Il problema sarebbe impossibile in tutti i casi, se il lato B fosse minore della perpendicolare abbassata dal punto E sulla linea retta DF.

II. Nel caso che l'angolo dato era acuto e che lo si voleva opposto al lato minore, si è veduto che i due triangoli DEF, DEG soddisfacevano ugualmente al problema; dunque due triangoli potrebbero avere due lati rispettivamente uguali a due lati e un angolo uguale opposto ad un lato uguale, senza che essi triangoli siano uguali, quando però l'angolo uguale sia acuto. Ora si osservi che de' due triangoli DEF, DEG il primo è ottusangolo, il secondo acutangolo; adunque all' uguaglianza di tali triangoli si dee aggiungere la condizione ch'essi siano della medesima specie. Questo corrisponde a ciò che si è detto nella proposizione XXVII del libro primo.

PROBLEMA XII

Dati i due lati adiacenti A e B di un parallelogrammo e l'angolo C ch'essi comprendono, costruire il parallelogrammo.

Si tiri la linea retta DE=A (fig. 83), facciasi al punto D l'angolo FDE=C, prendasi DE=A, DF=B; descrivansi due archi, l'uno dal punto F, come centro, e con un raggio FG = DE, l'altro dal punto E, come centro, e con un raggio EG=DF; al punto G, ove questi due archi si tagliano, si tirino FG, EG; e così DEGF sarà il parallelogrammo cercato.

Imperocchè, per costruzione, i lati opposti sono uguali, dunque il quadrilatero descritto è un parallelogrammo (30, 1), e questo parallelogrammo è formato coi lati dati e l'angolo dato.

Scolio I. Secondo che l'angolo dato sia retto, o che i due lati dati siano fra loro uguali, o che siano insieme i lati uguali e l'angolo retto, il parallelogrammo sarà un rettangolo, un rombo, od un quadrato.

II. Adunque tre condizioni sono necessarie e sufficienti per determinare il parallelogrammo; perchè siccome la diagonale DB (fig. 44) divide il parallelogrammo in due triangoli uguali ADB, BDC, così basta determinare una di esse ADB, e poi tirare le parallele AC e BC; ora tre condizioni appunto si richieggono perchè sia determinato un triangolo.

È chiaro da ciò che per costruire un parallelogrammo si potrebbe anche dare la diagonale DB e i due lati AD, AB; o pure la diagonale DB e i due angoli ADB, ABD, ch' essa fa coi due lati adiacenti AD, AB; od anche la diagonale DB, un angolo ADB che ella fa con un lato AD e l' angolo A che formano i due lati AD, AB; o un lato AB e i due angoli ADB, ABD ch' esso o il suo adiacente fanno con la diagonale DB; o in ultimo un lato AB, un angolo ABD ch' esso fa con la diagonale DB e l' angolo DAB che fa col lato adiacente.

Un parallelogrammo sarebbe anche determinato quanto si dessero le sue due diagonali AC, DB (fig. 45) e l'angolo DOC ch'esse formano.

Nel rombo basta dare le sole diagonali, perchè si sa ch' esse sono perpendicolari; nel rettangolo l' angolo che fanno le due diagonali ed una di esse, perchè si sa ch' elle sono uguali; in ultimo nel quadrato una sola diagonale, sia perchè si sa ch' elle sono uguali e perpendicolari, sia perchè nel triangolo ABD (fig. 157) si sa che ciascuno degli angoli ABD, ADB è un semiretto.

PROBLEMA XIII

Trovare il centro di un cerchio o di un arco dato.

Si prendano ad arbitrio sulla circonferenza o sull' arco tre punti A, B, C (fig. 84); si congiungano AB e BC, e si dividano queste linee rette ciascuna in due parti uguali mediante le rispettive perpendicolari DE, FG; il punto O, dove queste perpendicolari a due rette AB, BC che s' incontrano, debbano necessariamente incontrarsi sarà il centro cercato (7, 2).

Scolio I. Quando si vuol trovare il centro di un cerchio le due rette AB, BC potrebbero anche essere parallele; allora la per-

pendicolare che dividerebbe per metà una di essa dovrebbe essere anche perpendicolare all'altra e quindi dividerla per metà. Così questa linea retta sarebbe il diametro del cerchio; dunque il suo punto di mezzo sarebbe il centro cercato. Ma è manifesto che, trattandosi del centro di un arco dato, AB non potrebbe mai essere parallela a BC.

II. La medesima costruzione serve a far passare una circonferenza per i tre punti A, B, C, come pure a descrivere una circonferenza nella quale il triangolo dato ABC sia iscritto.

III. Dunque le perpendicolari elevate dai punti di mezzo dei lati di un triangolo s'incontrano tutte e tre nel medesimo punto, ch'è il centro del cerchio circoscritto al triangolo.

PROBLEMA XIV

Per un dato punto menare la tangente ad un cerchio dato.

Due casi possono darsi: o che il punto dato A (fig. 83) stia sulla circonferenza, o fuori.

1.° Sia il punto A sulla circonferenza. Si tiri il raggio CA, e si conduca AD perpendicolare a CA; AD sarà la tangente cercata (9, 2).

2.° Sia il punto A fuori della circonferenza (fig. 86). Si congiunga il centro e il punto dato A con la retta CA; si divida questa retta per metà nel punto O; dal punto O, come centro, e col raggio OC, si descriva una circonferenza, la quale taglierà la circonferenza data in un punto; e in ultimo si congiunga AB; dico questa AB essere la tangente richiesta.

In fatti tirando CB, l'angolo CBA, iscritto nel semicerchio, è un angolo retto (16, 2); dunque AB è perpendicolare all'estremità del raggio CB, epperò tangente alla data circonferenza.

Scolio I. Allorchè il punto A stia fuori del cerchio, si vede che vi sono sempre due tangenti AB, AD, le quali passano pel punto A; le due parti AB, AD di queste tangenti [1] comprese tra il pun-

[1] Dico *le due parti delle tangenti sono uguali*, o non, come si esprime il Legendre, *le due tangenti sono uguali*, perchè nella tangente geometrica non si consi-

to dato A e i punti di contatto sono uguali; perocchè i triangoli rettangoli CBA, CDA hanno l'ipotenusa CA comune, e il lato CB = CD; dunque essi sono uguali (27, 1); dunque AD = AB. Dall'uguaglianza di questi due triangoli si vede pure che l'angolo CAD = CAB; dunque *la linea retta che congiunge il centro di un cerchio con un punto fuori di esso divide per metà l'angolo formato dalle due tangenti menate da questo punto al cerchio.*

II. In questo problema si determina una linea retta che adempia alle due condizioni di essere tangente ad una data circonferenza e di passare per un punto dato. Ora si potrebbe anche determinare una linea retta tangente, variando l'altra condizione; ma i problemi che così nascono non sono fondamentali, e noi li abbiamo enunciati tra quelli che si trovano proposti a risolvere alla fine della geometria.

PROBLEMA XV

Iscrivere un cerchio in un triangolo dato.

Sia ABC (fig. 87) il triangolo dato. Si dividano due angoli qualunque A e B in due parti uguali colle linee rette OA e BO le quali chiarissimamente s'incontreranno in un punto O; dal punto O si abbassino rispettivamente le perpendicolari OD, OE, OF sui tre lati del triangolo; dico che queste perpendicolari sono uguali fra loro. Infatti per costruzione, l'angolo DAO = OAF, l'angolo retto ADO = AFO; dunque il terzo angolo AOD, è uguale al terzo AOF. Da altro canto il lato AO è comune ai due triangoli AOD, AOF, e gli angoli adiacenti al lato uguale sono uguali; dunque questi due triangoli sono uguali; epperò DO = OF. Si proverà in ugual guisa che i due triangoli BOD, BOE sono uguali; dunque OD = OE, e così le tre perpendicolari OD, OE, OF sono uguali fra loro.

Ora se dal punto O, come centro, e col raggio OD, si descriva una circonferenza, è chiaro che questa circonferenza passerà pei punti E ed F; di più essendo i raggi OD, OE, OF perpendicolari,

dera già la sua grandezza ma sì la posizione, al contrario della tangente trigonometrica ch'è una certa parte determinata della geometrica.

per costruzione, ai tre lati del triangolo, questi lati saranno tangenti della circonferenza, la quale perciò, come si richiedeva, sarà iscritta nel triangolo dato.

Scolio I. S'inferisce immediatamente da ciò che le tre linee rette le quali dividono per metà i tre angoli di un triangolo s'incontrano in un medesimo punto.

Si è veduto pure nella proposizione XIII che le tre perpendicolari elevate dai punti medi dei lati di un triangolo s'incontrano nel medesimo punto. Tra i teoremi proposti a dimostrare alla fine della geometria, si veggono altri esempi di rette che s'incontrano nel triangolo in un medesimo punto.

II. In questo problema si è venuto a tracciare una circonferenza tangente a tre rette date; se due di queste rate fossero state parallele la costruzione sarebbe stata la stessa, e la perpendicolare ad una delle parallele sarebbe stata perpendicolare ancora all'altra.

Nel problema XIII si è fatta passare una circonferenza per tre punti non in linea retta. Ora queste condizioni di passare per dati punti ed essere tangenti a linee rette date, per determinare una circonferenza, potrebbero combinarsi a tre a tre anche in altri modi, che non sono questi due della proposizione presente e della XIII, nelle quali si è tracciata una circonferenza che passi per tre punti dati, e poi che sia tangente a tre date linee rette. Potrebbesi ancora dare una linea retta alla quale la circonferenza dovrebbe essere tangente e due punti per i quali dovrebbe passare; uno di questi due punti potrebbe stare sulla retta data, ed allora vorrebbesi che la circonferenza passasse per l'altro punto dato, e fosse tangente alla data retta in quel punto. Ancora si potrebbero dare due linee rette, parallele o non, alle quali dovrebbero esser tangente la circonferenza ed un punto per il quale dovrebbe passare; questo punto potrebbe anche stare su di una data delle rette, ed allora richiederebbesi che la circonferenza fosse tangente ad essa retta data in quel punto. Questi problemi non potrebbero essere qui risoluti, perchè non bastano le cognizioni de' due primi libri; ma essi non saranno risoluti nemmeno in appresso perchè non sono fondamentali. Li abbiamo però proposti alla fine della geometria, ove si leggono le loro enunciazioni. Ivi si vedranno anche date altre condizioni per determinare una circonferenza; sempre però nel numero di tre.

PROBLEMA XVI

Sopra una data linea retta AB descrivere un segmento capace dell'angolo C, cioè tale che tutti gli angoli che vi sono iscritti siano uguali all'angolo dato C.

Si prolunghi AB verso D (fig. 88, 89), facciasi al punto B l'angolo DBE = C, si tiri BO perpendicolare a BE, e GO perpendicolare sul punto medio di AB; dal punto d'incontro O, come centro, e col raggio OB, si descriva un cerchio; il segmento cercato sarà AMB.

Perocchè, essendo BF perpendicolare all'estremità del raggio OB, BF è una tangente, e l'angolo ABF ha per misura la metà dell'arco AKB (13, 2); da altra parte l'angolo AMB, come angolo iscritto, ha eziandio per misura la metà dell'arco AKB; dunque l'angolo AMB = ABF = EBD = C; dunque tutti gli angoli iscritti nel segmento AMB sono uguali all'angolo dato C.

Scolio I. Se l'angolo dato fosse retto, la medesima costruzione non potrebbe aver luogo perchè non vi sarebbe il punto d'incontro O; ma la costruzione sarebbe allora facilissima, perchè il segmento cercato è il semicerchio descritto sul diametro AB.

II. Anco in questo problema si tratta di determinare una circonferenza che adempia a tre date condizioni. Queste condizioni sono che la circonferenza passi pe'due punti A e B in modo che il segmento AMB sia capace di un dato angolo C.

PROBLEMA XVII

Date due linee rette, trovare la loro comune misura, per così esprimere in numeri il loro rapporto.

Si porti la minore CD (fig. 90) sulla maggiore AB tante volte quante può esservi contenuta; per esempio, due volte col resto BE. Indi si porti medesimamente il resto BE sulla linea retta CD tante volte quante vi può essere contenuta; una volta, per esem-

pio, col resto DF. Questo secondo resto DF si porti, come prima sul primo resto BE; e vi entri una sola volta col resto BG.

Si porti il terzo resto BG tante volte nel secondo quante può esservi contenuto; e si continui sempre così, fino a che si giunga ad un resto, il quale sia contenuto un esatto numero di volte nell'antecedente.

Allora quest'ultimo resto sarà la comune misura delle due linee rette proposte, ed assumendolo per unità, si troveranno facilmente i valori dei resti precedenti ed infine quelli delle due date linee rette; d'onde si esprimerà il loro rapporto con due numeri interi, i quali esprimeranno il numero di volte che ciascuna di esse rette contiene la comune misura.

Per esempio, se col procedimento indicato si trovasse che GB è contenuta esattamente due volte in FD, BG sarà la comune misura delle due linee rette proposte. Sia dunque $BG = 1$, si avrà $FD = 2$; ma EB contiene una volta FD più GB; dunque $EB = 3$; CD contiene una volta EB più FD; dunque $CD = 5$; finalmente AB contiene due volte CD più EB; dunque $AB = 13$; dunque il rapporto dello due linee AB, CD è quello di 13 a 5.

Se in luogo di prendere per unità la comune misura, si prendesse per unità CD, la linea retta AB sarebbe espressa da $\frac{13}{5}$; e se si prendesse per unità AB, CD sarebbe espressa da $\frac{5}{13}$. Di qui si vede che non ci ha numero intero o fratto assolutamente, ma ch'essendo arbitraria la scelta dell'unità, secondo che cangiasi questa unità, un numero da intero che prima era, potrebbe essere espresso da un fratto, e viceversa.

Scolio. Il metodo esposto è precisamente lo stesso di quello che si stabilisce in aritmetica per trovare il massimo comun divisore tra due numeri; laonde non abbisogna qui di una nuova dimostrazione. Si vede poi chiaramente che la comune misura è un divisore comune delle due date linee rette, perchè entra un numero esatto di volte nell'altra; si vede di più ch'è il massimo comun divisore, ovvero la massima aliquota comune; perchè è la prima che si trova col procedimento indicato. Questo procedimento poi consiste a dividere la retta maggiore per la minore, perchè que-

sto vuol dire il vedere quante volte la minore è contenuta nella maggiore; indi la minore pel resto primo; il resto primo pel resto secondo; il resto secondo pel terzo, e così di seguito fino a che si giunga ad una divisione esatta. E così si vede chiarissimamente che questo metodo è, come abbiamo detto, lo stesso di quello che si dà in aritmetica.

Potrebbe avvenire che per quanto lungi si spingesse l'operazione, mai non si trovasse un resto il quale sia contenuto un esatto numero di volte nel precedente; in questo caso le due linee rette non hanno comune misura, cioè il loro rapporto non si può esprimere esattamente in numeri; epperò esse linee rette diconsi *incommensurabili*. Della esistenza di tali linee rette si avrà in progresso un esempio nel rapporto della diagonale al lato del quadrato. Non però di meno il rapporto delle due rette si potrà esprimere per approssimazione, non tenendo conto dell'ultimo resto; e si concepisce che l'approssimazione sarà tanto maggiore quanto più lontano si sarà spinta l'operazione, o, che vale lo stesso, quando più piccolo è il resto che si neglige.

PROBLEMA XVIII

Trovare la comune misura di due dati archi CD, EF, appartenenti alla medesima circonferenza. Trovare quindi con ciò la comune misura tra due dati angoli commensurabili A e B, ed esprimere così in numeri il loro rapporto.

1.° Per paragonare i due archi CD, FE (fig. 91) si opererà in un modo analogo a quello del problema precedente; perocchè supponendosi appartenere questi archi dati ad una stessa circonferenza, uno di essi può essere portato sull'altro, come una linea retta su di un'altra linea retta. Per portare poi il minore quante volte si può sul maggiore, ben si comprende, che devesi iscrivere successivamente la corda del primo quante volte si può nel secondo; perchè corde uguali nello stesso cerchio intercettano archi uguali (4, 2). Si giungerà in tal guisa a trovare la comune misura tra i due archi; e poscia si vedrà quante volte essa è contenuta da ciascuno di essi, nello stesso modo che nel proble-

ma antecedente. E così sarà espresso in numeri il rapporto de'due dati archi.

2.° In quanto al trovare la comune misura tra due dati angoli A e B, e quindi esprimere in numeri il loro rapporto, si vede subito essere questa la costruzione. Con due raggi uguali si descriveranno gli archi CD, EF; si troverà in numeri il rapporto di questi due archi nella maniera or ora indicata, e questo rapporto sarà pure quello degli angoli A e B.

Scolio. Si può trovare così il valore assoluto di un angolo, paragonando l'arco che servegli di misura all'intera circonferenza; se, per esempio, l'arco CD sta alla circonferenza come 3 a 25, l'angolo A sarà i $\frac{3}{25}$ di quattro angoli retti, ovvero i $\frac{12}{25}$ di un angolo retto.

Potrebbe avvenire che gli archi che si vogliono paragonare non avessero comune misura; allora il loro rapporto non si potrebbe esprimere in numeri se non con una approssimazione maggiore o minore, secondo che più o men lungi sia stata spinta l'operazione. Il simile dicasi degli angoli a' quali questi archi servono di misura.

LIBRO III

PROPORZIONI DELLE LINEE RETTE E DEI POLIGONI.

DEFINIZIONI

I. Si chiamano *figure equivalenti* quelle le cui superficie sono uguali.

Due figure possono essere equivalenti, comechè dissimilissime; per esempio, un cerchio può essere equivalente ad un quadrato, un triangolo ad un rettangolo, ec.

Il nome di figure uguali sarà solamente proprio di quelle che poste l'una sull'altra coincidono in tutti i loro punti, e le quali perciò non hanno solo le superficie uguali, ma sì ancora la stessissima forma; tali sono, per esempio, due cerchi i cui raggi siano uguali, due triangoli che hanno i loro lati rispettivamente uguali, ec.

Veramente questa idea di figure che abbiano uguali superficie senza che possano combaciare l'una con l'altra, cioè di forme differenti, non si concepisce forse così agevolmente senza bisogno di dimostrazione. Ma del resto l'esistenza di tali figure sarà dimostrata fin dalla prima proposizione di questo libro.

II. Si comprende chiaramente che due poligoni potrebbero essere equiangoli fra loro senza avere i loro lati nè uguali ciascuno a ciascuno, nè generalmente proporzionali; come pure si comprende che potrebbero avere i loro lati rispettivamente uguali o proporzionali senza essere equiangoli fra loro. Infatti si potrebbero inclinare alcune linee rette l'una all'altra e formare un poligono tale che tutti i suoi angoli siano rispettivamente uguali a-

gli angoli di un dato poligono; ma i lati di questi angoli si potrebbero prendere di lunghezza arbitraria, cioè che non siano nè uguali ciascuno a ciascuno nè proporzionali ai lati del poligono dato. Al contrario potrebbesi prendere un numero di linee rette uguale al numero dei lati di un dato poligono, e tali queste rette che siano uguali o proporzionali ai lati di quel poligono, indi inclinarle arbitrariamente fra loro, da formarne un poligono non equiangolo al primo.

Due poligoni potrebbero essere insieme equiangoli ed avere i lati proporzionali; ma l'esistenza di tali poligoni ha bisogno di essere dimostrata, come faremo in appresso; e si determinerà pure che posizione debbono avere i lati proporzionali rispetto agli angoli uguali.

Due triangoli si dicono *simili* quando sono equiangoli fra loro, per lo che si sa già che basta che abbiano due angoli rispettivamente uguali a due angoli.

Due poligoni si dicono simili quando sono composti del medesimo numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno e similmente disposti, e formati dalle diagonali tirate dal vertice di un medesimo angolo ai vertici di tutt' i rimanenti angoli.

Che siano possibili tali poligoni è cosa evidentissima e che punto non abbisogna di dimostrazione. In seguito si dimostrerà che i poligoni simili sono appunto quelli che hanno angoli uguali e lati proporzionali; e che questi lati proporzionali sono i lati *omologhi*, cioè quelli che hanno la medesima posizione ne'due poligoni, che sono adiacenti ad angoli uguali. Di più si dimostrerà che due poligoni non potrebbero essere equiangoli fra loro ed avere i lati proporzionali, senza che questi lati non fossero omologhi, cioè che i soli poligoni simili hanno angoli uguali e lati proporzionali.

III. Si chiamano *archi simili*, *settori simili*, *segmenti simili* quegli archi, quei settori e quei segmenti che in cerchi differenti corrispondono ad angoli al centro uguali.

Questi archi, questi settori e questi segmenti si chiamano così perchè serbano lo stesso rapporto alle rispettive circonferenze. Così si considerino gli archi simili BC, DE (fig. 92), è chiaro che si ha la proporzione (15, 2):

angolo A : 4 retti :: arco BC : circonferenza AB

ho espresso con *circonferenza* AB, la circonferenza che ha per raggio AB. Parimenti si ha

angolo O : 4 retti :: arco DE : circonferenza OD.

Ora essendo l'angolo A = O, le due prime ragioni di queste proporzioni sono le stesse; onde le altre due ragioni sono uguali, e formeranno la proporzione :

arco BC : circonferenza AB :: arco DE : circonferenza OD.

È chiaro che quello che si è detto degli archi conviene ugualmente ai settori BAC, ODE, ed ai segmenti BC, DE.

IV. L'*altezza* di un parallelogrammo è la perpendicolare EF (fig. 93), che misura la distanza de' due lati opposti AB, CD presi per basi.

È facile vedere che nel romboide e nel rettangolo le due altezze sono differenti, secondo che si cangiano le basi; nel rombo e quindi nel quadrato sono le stesse.

V. L'*altezza* di un triangolo è la perpendicolare AD (fig. 94) abbassata dal vertice di un angolo A sul lato opposto BC preso per base.

Qui pure si vede agevolmente che in un triangolo scaleno secondo che mutasi la base, le tre altezze sono differenti; nel triangolo isoscele le due altezze abbassate sui due lati uguali sono uguali; e per conseguenza nel triangolo equilatero le tre altezze sono le stesse.

VI. L'*altezza* di un trapezio è la perpendicolare EF (fig. 95) che misura la distanza dei suoi due lati paralleli, che si sogliono quasi sempre prendere per basi.

VII. L'*aia* o la superficie di una figura sono due voci presso che sinonime; ma l'aia esprime più particolarmente la quantità superficiale della figura in quanto ch'essa è misurata o paragonata ad altre superficie.

PROPOSIZIONE PRIMA. — *TEOREMA.*

I parallelogrammi che hanno basi uguali ed altezze uguali sono equivalenti.

Si dispongano le due basi uguali in modo che formino la sola retta AB (fig. 96); così poichè i due parallelogrammi ABCD, ABEF suppongonsi avere la medesima altezza, le loro basi superiori DC, FE saranno situate sopra una medesima linea retta parallela ad AB. Ora si ha, per la natura dei parallelogrammi, AD = BC, come lati opposti, ed AF = BE; e per la medesima ragione si ha DC = AB ed FE = AB; dunque DC = FE; epperò, togliendo dalla stessa linea retta DE una volta DC, un' altra volta la sua uguale FE, i resti CE e DF saranno uguali.

Segue da ciò che i due triangoli DAF, CBE sono equilateri fra loro e per conseguenza uguali.

Ora se dal quadrilatero ABED si sottragga il triangolo ADF resta il parallelogrammo ABEF; e se dallo stesso quadrilatero ABED si tolga il triangolo CBE, resta il parallelogrammo ABCD; ma i due triangoli DAF, CBE si sono dimostrati uguali, dunque dalla medesima superficie si è tolta prima un' altra superficie e poi una seconda uguale; dunque le due rimanenti superficie sono uguali, cioè i due parallelogrammi ABCD, ABEF sono equivalenti; come bisognava dimostrare.

Corollario. Ogni parallelogrammo ABCD (fig. 97) è equivalente al rettangolo ABEF di uguale base ed uguale altezza.

PROPOSIZIONE II. — *TEOREMA.*

Ogni triangolo è la metà del parallelogrammo che ha uguale base ed uguale altezza.

Infatti è chiaro che il triangolo ABC (fig. 98) è la metà del parallelogrammo ABCD che ha l'istessa base e l'istessa altezza; perchè i due triangoli ABC, ACD sono uguali (29, 1).

Lo stesso avverrebbe di ogni altro parallelogrammo che avesse

la medesima base e la medesima altezza, perchè esso sarebbe equivalente al parallelogrammo ABCD.

Corollario I. Tra questi parallelogrammi ci ha pure il rettangolo BCEF; dunque ogni triangolo è metà del rettangolo che ha uguale base ed uguale altezza.

II. S' inferisce immediatamente da ciò che due triangoli i quali hanuo uguali basi ed ugnali altezze sono equivalenti.

Scolio. Allorchè più triangoli ABF, AFG, AGA, AHC (fig. 125) hanno lo stesso vertice A e le basi BF, FG, GH, HC sopra una medesima linea retta, hanno la medesima altezza; perchè questa è la perpendicolare abbassata dal punto A sulla retta BC.

Dunque se si voglia dividere un triangolo qualunque ABC in un certo numero di parti uguali, basterà dividere in quel numero di parti uguali un lato qualunque BC e poi congiungere i punti di divisione col vertice dell' angolo opposto A; perchè allora tutti i triangoli successivi che ne nascono, avendo basi uguali e l'altezza comune, saranno equivalenti.

PROPOSIZIONE III. — *TEOREMA*.

Due rettangoli di uguali altezze stanno fra loro come le basi.

Siano ABCD, AEFD (fig. 99) due rettangoli che abbiano per altezza comune AD; io dico che essi stanno fra loro come le loro basi AB, AE.

Suppongasi da prima che le basi AB, AE siano commensurabili, e che stiano, per esempio, fra loro come 7 a 4. Se dividesi AB in 7 parti uguali, AE conterrà 4 di queste parti; si elevi da ciascun punto di divisione la perpendicolare alla base; si formeranno così sette rettangoli parziali, i quali saranno uguali fra loro, perocchè avranno basi uguali ed altezze uguali. Il rettangolo ABCD conterrà quattro di questi triangoli, dove che AEFD ne contien sette; dunque il rettangolo ABCD sta al rettangolo AEFD come 7 a 4, ovvero come AB ad AE. Dello stesso ragionamento farebbesi uso per qualunque altro rapporto commensurabile diverso da quello di 7 a 4; dunque è chiaro che qualunque sia questo rapporto commensurabile, si avrà sempre:

ABCD : AEFD :: AB : AE.

Suppongasi in secondo luogo che le basi AB, AE (fig. 100) siano incommensurabili fra loro; dico che si avrà medesimamente

ABCD : AEFD :: AB : AE.

Infatti se questa proporzione non è vera, rimanendo gli stessi i tre primi termini, il quarto sarà o maggiore o minore di AE. Supponiamo che ne sia maggiore e che si abbia

ABCD : AEFD :: AB : AO.

S'immagini divisa la linea retta AB in parti uguali minori di EO; vi sarà almeno un punto di divisione I tra E ed O; da questo punto si elevi sopra AI la perpendicolare IK; le basi AB, AI saranno commensurabili tra loro, e quindi, secondo quello che si è or ora dimostrato, si avrà

ABCD : AIKD :: AB : AI.

Ma si ha, per ipotesi,

ABCD : AEFD :: AB : AO.

In queste due proporzioni gli antecedenti sono gli stessi; dunque i conseguenti sono proporzionali, e si avrà

AIKD : AEFD :: AI : AO.

Ora si vede che AO è maggiore di AI; dunque perchè quest'ultima proporzione fosse vera, bisognerebbe che il rettangolo AEFD fosse maggiore del rettangolo AIKD; ma al contrario, n'è minore; dunque la proporzione è impossibile; epperò ABCD non può stare ad AEFD come AB ad una linea retta maggiore di AE.

Con un ragionamento affatto simile si proverebbe che il quarto

termine della proporzione non può essere minore di AE; dunque gli è uguale.

Epperò qualunque sia il rapporto delle basi di due rettangoli di uguale altezza, questi rettangoli stanno fra loro come le basi.

Scolio. Si noti che la maniera onde qui dal caso che le basi erano commensurabili, si è passato a quello in cui elle erano incommensurabili è analoga a quella impiegata nel secondo libro, dove si è dimostrato che nel medesimo cerchio o in cerchi ugnali gli angoli al centro stanno fra loro nel medesimo rapporto che gli archi ch' essi intercettano sulle circonferenze. Noi perciò quante altre volte dovremo fare simili dimostrazioni, tratteremo il solo caso che le quantità siano commensurabili, perchè è facilissimo da queste due proposizioni di vedere in che modo si passerebbe al caso in cui elle siano incommensurabili.

PROPOSIZIONE IV. — *TEOREMA*.

Due rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle basi per le rispettive altezze.

Siano due rettangoli qualunque ABCD, AEGF (fig. 101); dico che si avrà ABCD : AEGF :: AB × AD : AE × AF.

Si dispongano questi due rettangoli in modo che gli angoli in A siano opposti al vertice; si prolunghino i lati GE, CD fino a che s'incontrino in H. I due rettangoli ABCD, AEHD hanno la medesima altezza AD; essi dunque, in virtù del teorema precedente, stanno fra loro come le basi AB, AE; parimente i due rettangoli AEHD, AEGF, avendo la medesima altezza AE, stanno fra loro come le basi AD, AF. Si avranno dunque così le due proporzioni:

ABCD : AEHD :: AB : AE.
AEHD : AEGF :: AD : AF.

Moltiplicando queste due proporzioni *per ordine*, ed osservando che il termine AEHD può essere omesso, come fattor comune ai due termini della prima ragione, si avrà

$$ABCD : AEGF :: AB \times AD : AE \times AF;$$

la quale proporzione esprime appunto ciò che si voleva dimostrare.

Scolio. Adunque poichè l'aia di un rettangolo cangia nel medesimo rapporto in cui cangia il prodotto della sua base per l'altezza, si potrà prendere questo prodotto per misura del rettangolo, purchè intendasi per questo prodotto quello de' due numeri che rappresentano il numero di unità lineari contenute nella base, e il numero di unità lineari contenute nell'altezza.

Da altra parte questa misura non è mica assoluta, ma solamente relativa; ella suppone che si valuti medesimamente un altro rettangolo misurando i suoi lati colla stessa unità lineare; ottiensi così un secondo prodotto, ed il rapporto di questi due prodotti è uguale a quello de' due rettangoli, secondo la proposizione che si è qui dimostrata.

Per esempio, se la base del rettangolo A è di 3 unità lineari e la sua altezza di 10, il rettangolo sarà rappresentato dal numero $3 \times 10 = 30$, numero che così isolato non ha significato alcuno; ma se si ha un secondo rettangolo B la cui base sia di dodici unità e l' altezza di 7, essendo esso così rappresentato da $7 \times 12 = 84$, si conchiude che i due rettangoli A e B stanno fra loro come 30 ad 84; dunque se si convenisse di prendere il rettangolo A per l' unità di misura superficiale, il rettangolo B avrebbe allora per misura assoluta $\frac{84}{30}$, cioè conterrebbe $\frac{84}{30}$ di unità superficiali.

È più ordinario e più semplice di prendere il quadrato per l'unità di superficie, e si sceglie il quadrato il cui lato è l'unità di lunghezza; allora la misura che noi abbiamo considerata semplicemente come relativa, diviene assoluta; per esempio, il numero 30, col quale abbiamo misurato il rettangolo A, rappresenta 30 unità superficiali, cioè 30 quadrati i cui lati siano uguali all'unità lineare. Ciò è reso sensibile nella fig. 102.

Per tali considerazioni si confonde spessissime volte in geometria il prodotto di due linee rette col loro *rettangolo*; e questa espressione è anche passata in aritmetica per dinotare il prodotto

di due numeri disuguali, come si adopera anche quella di *quadrato* per esprimere il prodotto di un numero moltiplicato per sè medesimo.

Ora è chiaro che tutte quelle proprietà dimostrate nell'algebra circa i numeri considerati come prodotti di due altri si cangeranno in altrettante proposizioni geometriche, le quali possono considerarsi come già dimostrate. Nel cangiare quelle proposizioni algebriche nell' enunciato geometrico altro non si dovrà fare se non sostituire all' espressione *prodotto* di due numeri quella di *rettangolo* di due linee rette, perchè infatti, come abbiamo veduto, questo esprime il prodotto di due numeri quando essi rappresentano due linee rette. Adunque si ponno considerare come vere le proposizioni: 1° *se quattro linee rette siano proporzionali il rettangolo delle due che fanno da termini estremi è equivalente al rettangolo di quelle che fanno da termini medj;* 2° *se una linea retta sia media proporzionale tra due altre linee rette, il suo quadrato è equivalente al rettangolo delle altre due;* 3° *allorchè una linea retta è la somma di due altre linee rette, il suo quadrato e uguale al quadrato di queste rette, più il doppio rettangolo di una per l'altra;* infatti questa proposizione non è che la traduzione della formola già dimostrata in algebra: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; 4° *allorchè una linea retta sia la differenza di altre due linee rette, il suo quadrato è uguale alla somma dei quadrati di queste rette, meno il doppio rettangolo di una per l'altra;* ciò corrisponde alla formola algebrica $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$; 5° *il rettangolo che ha per base la somma di due linee rette e per altezza la loro differenza è uguale alla differenza de' quadrati di queste rette;* infatti è nota la formola algebrica $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; 6°. *se una linea retta è doppia di un'altra, il quadrato della prima è quadruplo del quadrato della seconda; se una linea retta è tripla di un'altra il quadrato della prima è nonuplo di quello della seconda*, e così di seguito; è noto infatti che i quadrati de'numeri 1, 2, 3 ec. sono 1, 4, 9 ec. E così potrebbe ancora enunciarsi una infinità di proposizioni simili; ma queste di cui si è fatta menzione sono più da notare che tutte le altre.

In geometria si ha però ancora il vantaggio di poter dimostrare tali proposizioni, indipendentemente dal considerare le linee rette espresse in numeri, e dal servirsi così delle dimostrazioni già fat-

te nell'algebra; si possono, dico, costruire convenevolmente questi tali rettangoli e quadrati, e paragonarli fra loro per istabilire le enunciate proposizioni, come si verrà facendo in appresso.

PROPOSIZIONE V. — *TEOREMA.*

L' aia di un parallelogrammo qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Infatti ogni parallelogrammo ABCD (fig. 97) è equivalente al rettangolo ABEF che ha la stessa base AB e la stessa altezza BE (prop. 1); ora questo rettangolo ha per misura $AB \times BE$ (prop. 4); dunque $AB \times BE$ è uguale all'aia del parallelogrammo ABCD.

Corollario I. I parallelogrammi di uguali basi stanno fra loro come le loro altezze, e i parallelogrammi di uguali altezze stanno fra loro come le basi; perchè se si abbiano tre quantità qualunque A, B, C, si ha generalmente $A \times C : B \times C :: A : B$; ora questo fattore comune C dei termini della prima ragione potrebbe rappresentare la base o l'altezza comune de' due parallelogrammi.

Scolio I. Sia, per esempio, 5 la base di un parallelogrammo, 7 la sua altezza, la sua aia sarà di 35 unità superficiali. Ora è chiaro che questa unità superficiale, che, come abbiam già veduto, è un quadrato che ha per lato l'unità lineare, non si potrebbe *graficamente* portare 35 volte esattamente nel dato parallelogrammo, stante la forma di questo parallelogrammo; essa unità superficiale però si potrebbe portare esattamente 35 volte nel rettangolo equivalente.

II. La proposizione dimostrata inchiude la seguente; *due parallelogrammi equivalenti di uguali basi hanno la stessa altezza, e viceversa.*

III. Si noti che se la proposizione presente si fosse potuta dimostrare senza bisogno delle antecedenti, queste sarebbero state tante conseguenze di essa; ma qui è stato forza seguire il medesimo metodo che abbiamo fatto osservare innanzi; cioè partire dal caso più particolare, ch'è quello della proposizione I, e poi percorrendo a mano a mano i più generali, giungere al più generale di tutti, ch'è questo della proposizione presente.

PROPOSIZIONE VI. — *TEOREMA.*

L' aia di un triangolo è uguale al prodotto della sua base per la metà della sua altezza.

Imperocchè il triangolo ABC (fig. 104) è la metà nel parallelogrammo ABCE, che ha la stessa base BC e la stessa altezza AD; ora la superficie del parallelogrammo ABCE ha per misura BC $\times$ AD, per ciò che si è dimostrato nella proposizione precedente; dunque quella del triangolo ABC ha per misura $\frac{1}{2}$ BC $\times$ AD, o, ch'è lo stesso, BC $\times \frac{1}{2}$ AD.

Corollario. Due triangoli di uguali altezze stanno fra loro come le basi, e due triangoli di uguali basi stanno fra loro come le altezze; epperò se i triangoli sono equivalenti ed abbiano uguali basi, avranno pure uguali altezze, e viceversa.

Scolio I. Supponiamo che 3 sia la base di un triangolo, 8 la sua altezza, 3×4, cioè 12 sarà la sua aia; ora si osservi anche qui che il quadrato ch' è l'unità superficiale non potrebbe portarsi nell' aia del triangolo 12 volte, per la forma del triangolo ; esso però si potrebbe disporre 12 volte esattamente nel rettangolo equivalente che ha per base la base del triangolo e per altezza la metà dell' altezza.

II. Questa proposizione ne fornisce il mezzo di dividere l'aia di un triangolo in un dato numero di parti che serbino l'una all'altra un determinato rapporto. Se, per esempio, si voglia dividere il triangolo ABC (fig. 125) in quattro parti che stiano l' una all' altra in data ragione, si dividerà la base BC in quattro parti che stiano fra loro nelle ragioni date, e si congiungeranno i punti F, G, H di divisione col vertice A; così i triangoli ABF, AFG, AGH, AHC, avendo la medesima altezza, stanno fra loro come le rispettive basi BF, FG, GH, HC, cioè nelle ragioni date. Come poi si divida una retta in parti che stiano l' una all' altra in data ragione è un problema che sarà risoluto in appresso.

III. Poichè l'aia di un triangolo è uguale al rettangolo della ba-

se per la metà dell'altezza, potendosi prendere indifferentemente per base del triangolo qualunque suo lato; si deduce che il rettangolo di un lato per la rispettiva altezza è equivalente al rettangolo di un altro lato per l'altezza rispettiva. Da ciò è facile inferire che in un triangolo qualunque i lati stanno tra loro in ragion reciproca delle rispettive altezze.

PROPOSIZIONE VII. — *TEOREMA.*

L'aia del trapezio è uguale alla sua altezza moltiplicata per la semisomma delle sue basi parallele.

Sia il trapezio ABCD, (fig. 105), di cui EF sia l'altezza, ed AB, CD i suoi due lati paralleli che sogliousi particolarmente prendere per basi; dico che l'aia del trapezio è uguale ad EF moltiplicata per la semisomma delle due rette AB, CD; il che si esprime così $ABCD = EF \times \left(\frac{AB + CD}{2}\right)$. Non bisogna dimenticare che, per quello che si è veduto innanzi, il trapezio viene così ad essere equivalente al rettangolo che ha per lati adiacenti EF ed $\frac{AB + CD}{2}$; e che però la sua aia contiene tante unità o parti di unità superficiali, quanto è il prodotto dei due numeri che rappresentano questi due lati.

Dal punto I medio del lato CB, si meni KL parallela al lato opposto AD, si prolunghi DC fino a che incontri, come dee necessariamente fare, KL.

Nei due triangoli IBL, ICK si ha il lato $IB = IC$ per costruzione, l'angolo $LIB = CIK$, e l'angolo $IBL = ICK$, poichè CK e BL sono parallele (21, 1); dunque questi triangoli sono uguali (7, 1); adunque il trapezio ABCD è equivalente al parallelogrammo ADKL, come si vede togliendo dall'intiera figura DABIK una volta il triangolo IBL ed un'altra volta il suo uguale ICK; dunque il trapezio ABCD ha per misura $EF \times AL$.

Ora, essendo $AL = DK$, e nei triangoli uguali IBL, ICK il lato $BL = CK$, sarà $AB + CD = AL + DK = 2AL$, e così AL è la semi-

somma delle basi AB, CD; dunque il trapezio $ABCD = EF \times \left(\frac{AB + CD}{2}\right)$.

Scolio. Se dal punto I medio di BC, si meni IH parallela alla base AB, il punto H sarà anche medio di AD, perocchè la figura AHIL è un parallelogrammo, al pari di HIKD, per essere i lati opposti paralleli; si ha dunque $AH = IL$, e $DH = IK$; ora $IL = IK$, poichè i triangoli BIL, CIK sonosi dimostrati uguali; dunque $AH = DH$.

Anco si può osservare che la linea retta $IH = AL = \frac{AB + CD}{2}$; dunque l'aia del trapezio si può anche esprimere con $EF \times HI$; ella è dunque uguale all'altezza del trapezio moltiplicata per la linea retta che congiunge i punti medi delle basi non parallele.

Ma nella pratica la prima misura è da preferire alla seconda; perchè in quest'ultima per trovare la retta HI vi è bisogno della costruzione per dividere i due lati non paralleli per metà, dove che nella prima le due basi parallele sono date insieme col trapezio.

PROPOSIZIONE VIII. — *TEOREMA.*

Allorchè una linea retta è la somma di due altre linee rette, il suo quadrato è uguale alla somma dei quadrati di queste rette, più il doppio rettangolo di una nell'altra.

Sia la linea retta AC (fig. 106) divisa nelle due parti AB, BC; dico che il quadrato fatto sopra di AC conterrà il quadrato fatto su di AB, più il quadrato fatto su di BC, più due volte il rettangolo di AB in BC, il che si esprime così: $\overline{AC}^2$ o $(AB + BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$.

S'immagini costruito il quadrato ACDE, si prenda $AF = AB$, e conducasi BH parallela ad AE ed FG parallela ad AC.

Il quadrato ACDE è così diviso in quattro parti: la prima ABIF è il quadrato fatto su di AB, perchè si è preso $AF = AB$; la seconda IGDH è il quadrato fatto su di BC; perchè essendo $AC = AE$, ed

AB=AF, la differenza AC—AB è uguale alla differenza AE—AF, cioè BC=EF; ma a cagione delle parallele IG=BC e DG=EF; dunque HIGD è uguale al quadrato fatto su di BC. Sottraendo queste due parti insieme dal tutto ACDE, rimangono i due rettangoli BCGI, EFIH, i quali sono fra loro uguali, avendo entrambi manifestamente per misura AB×BC; dunque il quadrato fatto sopra AC, ec.

PROPOSIZIONE IX. — *TEOREMA.*

Se una linea retta è la differenza di due altre linee rette, il suo quadrato è uguale alla somma de' quadrati di queste rette, meno il doppio rettangolo di una nell'altra.

Sia la linea retta AC (fig. 107) la differenza delle due AB, BC; dico che il quadrato fatto su di AC conterrà il quadrato di AB, più il quadrato di BC, meno il doppio rettangolo di AB in BC.

S'immagini costruito il quadrato ABIF, si prenda AE=AC, si tiri CG parallela a BI, HK parallela ad AB, e compiasi il quadrato EFLK.

I due rettangoli CBIG, GLKD hanno ciascuno per misura AB×BC; se si tolgano insieme questi due rettangoli dall'intiera figura ABILKEA, che ha per valore $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$, è chiaro che resterà il quadrato ACDE; dunque ec.

PROPOSIZIONE X. — *TEOREMA.*

Il rettangolo che ha per base la somma di due linee rette, e per altezza la loro differenza è uguale alla differenza dei quadrati di queste rette.

Sia la linea retta AC (fig. 108) la somma delle due AB, BC; prendendo BK=BC, sarà AK la differenza di queste due AB, BC; ora io dico che il rettangolo di AK in AC uguaglia il quadrato di AB meno il quadrato di BC.

Costruiti su di AB ed AK i quadrati ABIF, AKDE, si prolunghi EH di una quantità HL=BC, e si compia il rettangolo ACLE; questo rettangolo, come si vede, è appunto quello di AB+BC in AB—AC.

Questo rettangolo ACLE è composto visibilmente di due parti ABHE, HBCL; e la parte HBCL è uguale al rettangolo EDGF, perchè BH=DE, e BC=EF; dunque ACLE=ABHE+EDGF. Ora queste due parti formano il quadrato ABIF fatto sopra AB meno l' altro DHIG fatto su di BC; dunque finalmente $(AB+BC)\times(AB-BC)=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$. [1]

[1] Abbiamo veduto già che questa proposizione corrisponde alla formola algebrica $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, come pure che le due precedenti corrispondono rispettivamente alle due $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, $(a-b)^2=a^2+b^2-ab^2$; ed ivi abbiamo anche veduto che queste proposizioni potevano considerarsi come già dimostrate, senza il bisogno delle dimostrazioni geometriche che ne abbiamo qui date. Ora faremo osservare che vi sono moltissime altre proposizioni simili a queste tre, cioè corrispondenti a formole che si possono dimostrare nella moltiplicazione algebrica, e nelle quali però le quantità non siano che o moltiplicate a due a due fra loro o elevata ciascuna a quadrato; ch' è quanto dire in cui i termini non siano che di secondo grado. Ma siccome nell'algebra fra tutti i teoremi che potrebbonsi dimostrare con tali formole non si fa parola se non delle tre dette dianzi, che sono le più notevoli, così pure in geometria si fa solo menzione della tre proposizioni ad esse tre formole corrispondenti, e che però sono medesimamente più notevoli di tutte le altre proposizioni simili. Le quali altre proposizioni, essendo vere le formole corrispondenti, ponno considerarsi anche vere, ed è facilissimo tradurne l'enunciato dal linguaggio algebrico nel geometrico; se poi la dimostrazione si vorrà fare indipendentemente dalle formole algebriche, basterà costruire convenevolmente quei tali rettangoli e quadrati di cui si parla, e la proposizione analogamente a ciò che di sopra si è fatto, sarà visibile. Euclide nel suo secondo libro, oltre le tre da noi trattate, fa menzione anche di varie altre proposizioni simili; la ragione è che gli antichi non possedendo la luce suprema dell'algebra, che classifica le cose geometriche e ne determina la natura, riguardavano le verità della geometria come tanti fatti staccati, e facean tesoro, come di cosa stupenda e rara, di ognuna di esse verità, nè la rigettavano, comechè alcuna volta superflua, dai trattati elementari; ma oggidì chi volesse comprendere negli elementi tutte le innumerevoli bellissime proposizioni che senza i sudori dei Pitagora e degli Archimedi, ma con un solo ingegnoso maneggio dell'algebra si ponno trovare e dimostrare, farebbe opera infinita. E qui ci cade in acconcio di osservare che anche le dimostrazioni sintetiche delle proposizioni dimostrate dagli antichi, si dimostrano ora in un modo assai più semplice ed ele-

PROPOSIZIONE XI. — *TEOREMA.*

In un triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei cateti.

Sia ABC (fig. 109) un triangolo rettangolo in A; costruiti i quadrati sui suoi tre lati, si abbassi dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa la perpendicolare AD, che si prolungherà sino in E; si tirino in ultimo le diagonali AF, CH.

L'angolo ABF è composto dall'angolo ABC più l'angolo retto CBF; l'angolo CBH è composto dello stesso angolo ABC più l'angolo retto ABH; dunque l'angolo ABF = HBC. Ma AB = BH, come lati del medesimo quadrato, e BF=BC per la stessa ragione; dunque i triangoli ABF, HBC hanno un angolo uguale compreso tra lati uguali; dunque ei sono uguali (6, 1).

Il triangolo ABF è la metà del rettangolo BDEF, (o per brevità BE) che ha la stessa base BF e la medesima altezza BD (prop. 2).

gante, e si collegano assai più convenientemente le une alle altre, e meglio se ne mostra la corrispondenza, e si determina la natura di ciascuna; il che procede in tutto dalle dimostrazioni trovate innanzi coll'algebra.

È palese da tali considerazioni che chi ancora si ostinasse a volere studiare od insegnare Euclide sarebbe come un insensato che potendo camminare speditamente colle sue gambe e cogli occhi aperti, s'incapasse a dispetto di volere strascinarsi colle grucce e con una benda agli occhi.

Ritornando alle proposizioni riportate da Euclide nel suo secondo libro oltre le tre da noi trattate, è facile vedere che le formole corrispondenti sono: per la 1ª, $(a+b+c...)\,m=am+bm+cm...$; per la 2ª, $(a+b)^2=(a+b)\,a+(a+b)\,b$; per la 3ª, $(a+b)\,a=a^2+ab$; la 4ª è la prima delle tre da noi dette; per la 5ª, $(a+b)+(a-b)b+b^2=a^2$; per la 6ª, $(2a+b)\,b+a^2=(a+b)^2$; per la 7ª, $(a+b)^2+b^2=2\,(a+b)\,b+a^2$; per l'8ª, $[(a+b)+b]^2=(a+b)^2+b^2+4\,ab$; per la 9ª, $\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}=a^2+b^2$; per la 10ª, $\frac{(2a+b)^2+b^2}{2}=a^2+(a+b)^2$. Ora ognun vede quante altre formole simili potrebbonsi formare, e quindi quante altre proposizioni geometriche corrispondenti, oltre quelle riportate da Euclide. Per esempio, nella fine della geometria ne abbiamo formate varie altre, dandone le enunciazioni e le formole algebriche corrispondenti.

Il triangolo HBC è parimente la metà del quadrato AH; perocchè, essendo l'angolo BAC retto al pari di BAL, AC ed AL non formano che una sola linea retta parallela a HB; dunque il triangolo HBC ed il quadrato AH, che hanno la base comune BH, hanno anche l'altezza comune AB; dunque il triangolo è la metà del quadrato.

Si è dimostrato già il triangolo ABF $=$ HBC; dunque il rettangolo BDEF doppio del triangolo ABF è equivalente al quadrato AH, doppio del triangolo HBC. In simil modo si dimostrerà che il rettangolo CDEG è equivalente al quadrato AI; ma i due rettangoli BDEF, CDEG, presi insieme, formano il quadrato BCGF; dunque il quadrato BCGF, fatto sull'ipotenusa, è uguale alla somma dei quadrati ABHL, ACIK, fatti sopra gli altri due lati; o, in altri termini, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Corollario I. Dunque *in un triangolo rettangolo il quadrato di un cateto è uguale al quadrato dell'ipotenusa meno il quadrato dell'altro cateto;* il che si esprime così: $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$.

II. *In un triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa sta al quadrato di un cateto, come l'ipotenusa al segmento adiacente.* Chiamiamo qui *segmento* la parte dell'ipotenusa determinata dalla perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto.

Infatti si è dimostrato che il quadrato AH è equivalente al rettangolo BDEF; ora a cagione della comune altezza BF, il quadrato BCGF sta al rettangolo BDEF come la base BC sta alle base BD; dunque, come si voleva dimostrare

$$\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 :: BC : BD.$$

Similmente si proverebbe

$$\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 :: BC : CD.$$

III. *In un triangolo rettangolo i quadrati dei cateti stanno fra loro come i segmenti adiacenti.* Perocchè i rettangoli BDEF, DCGE, avendo la medesima altezza, stanno fra loro come le basi BD, CD. Ora questi rettangoli sonosi dimostrati equivalenti ai quadrati $\overline{AB}^2$, $\overline{AC}^2$; dunque

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC.$$

IV. ***In un triangolo rettangolo un cateto è media proporzionale tra l'ipotenusa e il segmento adiacente.*** **Infatti essendosi dimostrato il quadrato AH equivalente al rettangolo BDEF, si ha $\overline{AB}^2 = BC \times BD$; dalla quale espressione si ricava**

$$BD : AB :: AB : BC;$$

come si voleva dimostrare. Parimenti si ha

$$DC : AC :: AC : BC.$$

V. ***La perpendicolare è media proporzionale tra i due segmenti adiacenti.*** **Poichè nel triangolo rettangolo ABD, si ha $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2$; ma $\overline{AB}^2 = BC \times BD$ e $BC \times BD = (BD + DC)\ BD = \overline{BD}^2 + BD \times DC$; dunque $\overline{AD}^2 = BD \times DC + \overline{BD}^2 - \overline{BD}^2$, cioè $\overline{AD}^2 = BD + DC$; d'onde si ricava**

$$BD : AD :: AD : DC..$$

VI. Sia ABCD (fig. 118) un quadrato, AC la sua diagonale; il triangolo ABC essendo rettangolo e isoscele, dà $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$; dunque ***in un quadrato o il quadrato della diagonale è doppio del quadrato del lato.***

Questa proprietà può essere resa sensibile, menando dai punti A e C le parallele a BD, e dai punti B e D le parallele ad AC; si formerà un nuovo quadrato EFGH che sarà il quadrato di AC. Ora si vede che EFGH contiene otto triangoli uguali ad ABE, e che ABCD ne contiene quattro; dunque il quadrato EFGH è doppio di ABCD.

Poichè $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1$, si avrà estraendo la radice quadrata da tutti i termini, $AC : AB :: \sqrt{2} : 1$; ***dunque la diagonale di un quadrato è incommensurabile col suo lato.***

Ma di ciò si farà parola più a lungo in altro luogo.

Scolio. **I tre lati di un triangolo rettangolo potrebbero essere**

espressi in numeri; allora si avrebbe il quadrato del numero che rappresenta l' ipotenusa uguale alla somma dei numeri che esprimono i cateti. Tali sono i numeri 3, 4, 5, perchè $5^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. [1].

Questa proprietà dei tre numeri 3, 4 e 5 ci può far risolvere in altra guisa il problema già trattato innanzi di elevare la perpendicolare ad una linea retta dalla sua estremità senza prolungare questa linea retta. Sulla data retta EF (fig. 33) si prendano a partire dal punto E 4 parti consecutive uguali, che formino la retta EF; indi col centro E e con un raggio uguale a tre di queste parti si descriva un arco; col centro F e con un raggio uguale a cinque di queste parti si descriva un altro arco; si congiunga il punto D, dove è chiaro che questi archi dovranno incontrarsi, col punto E, e DE sarà la perpendicolare richiesta. Perchè il triangolo DEF ha il lato DF = 5, il lato DE = 3, il lato EF = 4, dunque esso è rettangolo in E.

[1] Per vedere quali siano le condiaioni perchè tre numeri fossero tali che il quadrato di nno aia uguale alla somma de'quadrati degli altri due, si noti che $(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$; queata uguaglianza diverrà uo' ideotità eseguendo le operazioni indicate oel primo e nel secondo membro. Aduoque se a^2+b^2 è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, i doe cateti saraooo a^2-b^2 e $2ab$; laonde potremo stabilire la regola seguente: *Per formare tre numeri tali che il quadrato di uno sia uguale alla somma dei quadrati degli altri due, si sommino due quadrati qualunque; questa somma sarà il primo numero; degli altri due numeri uno sarà la differenza dei quadrati presi, l'altro il doppio prodotto delle radici.* Si vede iofatti che i numeri 3, 4, e 5 detti di sopra adempiono a tale condizione, perchè 5 è oguale alla somma dei due quadrati 1 e 4; 3 è uguale alla loro differenza, e 4 è uguale al doppio prodotto delle loro radici, cioè $= 2 \times (2 \times 1)$; si vede anche da ciò che questi tre numeri sooo i più semplici perchè 1 e 4 sono i due più piccoli quadrati; ed è però che soglionsi più specialmente dare per esempio.

A proposito del triangolo rettangolo noi iovitiamo i nostri lettori, provetti nell' analisi a leggere nella *Théorie des nombres* del Legendre, n° 322 la dimostrazione del bel teorema del Fermat che l'*aia di un triangolo rettangolo in numeri interi non potrebbe essere un quadrato.*

PROPOSIZIONE XII. — *TEOREMA*.

In un triangolo qualunque il quadrato del lato opposto ad un angolo acuto è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, meno il doppio rettangolo di uno di questi lati in quella parte ch' è compresa tra il vertice dell' angolo acuto e tra il piede della perpendicolare abbassata dal vertice dell' angolo opposto.

Sia un triangolo qualunque ABC (fig. 110 e 111); io dico che il quadrato del lato AB opposto ad un angolo acuto C è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati AC, BC, meno il doppio rettangolo di uno BC di questi lati nella parte DC compresa tra il vertice dell' angolo acuto C ed il piede D della perpendicolare AD abbassata dal vertice dell'angolo opposto; il che si esprime così: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD$.

Si possono dare due casi. 1° Se la perpendicolare AD (fig. 111) cade dentro del triangolo ABC, allora nel triangolo rettangolo ABD, in virtù del teorema precedente, si ha $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$; ma, essendo $BD = BC - CD$, si ha $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC \times CD$ (prop. 9); dunque $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC \times CD$, cioè, osservando che nel triangolo rettangolo ADC si ha $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$, sarà, come si voleva dimostrare, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD$.

2.° Se la perpendicolare AD cade fuori del triangolo ABC (fig. 10), allora nel triangolo rettangolo ADB si ha $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$; ma $BD = CD - BC$, e per conseguenza $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD$; dunque sarà $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD$; ed osservando che nel triangolo rettangolo ADC si ha $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$, sarà finalmente, come prima, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD$.

Scolio. Si è detto che nel triangolo rettangolo il quadrato di un cateto è uguale al quadrato dell'ipotenusa meno il quadrato dell' altro cateto; ora questa proposizione può essere considerata come un caso particolare della presente. Infatti quando il triangolo ABC (fig. 110 e 111) divien rettangolo, la retta AB rota intorno il

punto A per mettersi su di AD, e così BC sarà divenuta uguale a DC; quindi il rettangolo $BC \times CD$ si ridurrà a $\overline{CD}^2$; e così applicando il teorema ora dimostrato al cateto AD che si oppone all'angolo acuto C si avrà $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 - 2CD \times CD$, cioè $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$.

PROPOSIZIONE XIII. — *TEOREMA.*

In un triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all' angolo ottuso è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati più il doppio rettangolo di uno di questi lati in quella parte del suo prolungamento ch' è compresa tra il vertice dell' angolo acuto e il piede della perpendicolare abbassata dal vertice dell' angolo opposto.

Sia il triangolo ABC (fig. 110) ottusangolo in B; io dico che sarà $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2BD \times BC$.

Prima di tutto si è avuta già occasione innanzi di vedere che la perpendicolare AD dee cadere fuori del triangolo ABC. Ora nel triangolo rettangolo ADC si ha $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$; ma $DC = DB + BC$, e quindi $\overline{DC}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BC}^2 + 2BD \times BC$; dunque $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 + \overline{BC}^2 + 2BD \times BC$, cioè $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2BD \times BD$, osservando che nel triangolo rettangolo ADB si ha $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{AB}^2$.

PROPOSIZIONE XIV — *TEOREMA.*

Se in un triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma de' quadrati degli altri due, il triangolo è rettangolo ed è propriamente retto l' angolo compreso da questi due lati.

Infatti se questo angolo non fosse retto dovrebbe essere o acuto od ottuso, ed allora, in virtù delle due proposizioni precedenti, il quadrato del primo lato sarebbe minore o maggiore della somma dei quadrati degli altri due; il che è contro l'ipotesi; dunque l' angolo è retto.

Potrebbesi anche fare la dimostrazione indipendentemente dai

due teoremi precedenti nel modo che segue. Sia ABD (fig. 28) il triangolo in cui si abbia $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2$; si tiri DC perpendicolare ad AD, si prenda DC=BD e si congiunga AC. Nel triangolo rettangolo ADC si ha $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2$; dunque $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$, e i due triangoli ACD, ABD sono uguali. Dunque l'angolo ADC=ADB =1 retto.

Scolio. Questa proposizione è reciproca della XI. Le reciproche delle due antecedenti sono manifestamente vere. [1]

PROPOSIZIONE XV. — *TEOREMA.*

In un triangolo qualunque se si congiunge il vertice di un angolo col punto di mezzo del lato opposto, sarà la somma dei quadrati degli altri due lati uguale al doppio quadrato della congiungente più il doppio quadrato della metà del lato.

Sia il triangolo ABC (fig. 112), in cui sia congiunto il vertice dell'angolo A col punto E medio del lato BC; dico che si avrà $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{BE}^2$.

[1] È chiaro da tutte queste proposizioni che quando sono dati i tre lati di un triangolo è facile di conoscere la natura di ciascun suo angolo. Infatti si prenderanno le perpendicolari DE ed EF (fig. 33) uguali ai due lati minori, e si congiungerà DF; secondo che il terzo lato sarà uguale, maggiore o minore di DF l'angolo E sarà retto, ottuso o acuto.

Che se i lati sian dati in numeri, si faranno i quadrati di questi numeri, e secondo che il maggiore sarà uguale, maggiore o minore della somma dei due altri, l'angolo opposto sarà retto, ottuso o acuto.

Anche, dati in numeri i tre lati di un triangolo, se ne può trovare col calcolo una altezza qualunque; e quindi l'aia del triangolo. In fatti chiamando a, b, c i tre lati di un triangolo ed x il segmento adiacente all'angolo opposto al lato che si considera, si ha $a^2=b^2+c^2\pm 2bx$; nel caso che il lato a è opposto all'angolo ottuso si prenderà il segno $+$, se all'acuto il segno $-$, se al retto si prenderà $x=o$. Ora da questa formola si ha $x=+\frac{b}{2}\mp\frac{(a+c)(a+c)}{2b}$; espressione che si presta comodissimamente ai logaritmi. Ora, chiamando h l'altezza, prendendo il lato b per base, si ha $h^2=c^2-x^2$, e quindi $h=\sqrt{(c+x)(c-x)}$; ma il segmento x si è espresso innanzi per mezzo dei lati; dunque h sarà espressa medesimamente per mezzo dei lati.

Trovata così l'altezza h e conoscendosi la base b si avrà l'aia del triangolo.

Si abbassi su BC la perpendicolare AD; il triangolo AEC darà pel teorema XII,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 - 2EC \times ED.$$

Il triangolo ABE darà pel teorema XIII,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 + 2EB \times ED.$$

Dunque sommando membro a membro ed osservando che EB = EC, si avrà,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{EB}^2.$$

Se il triangolo ABC (fig. 28), fosse isoscele e propriamente si avesse AB = AC, allora la stessa retta AD che congiunge il vertice col punto di mezzo della base, sarebbe la perpendicolare a BC; e quindi il teorema sarebbe manifesto, perchè $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$, e $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$; epperò $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2$.

Corollario. Dunque *in ogni parallelogrammo la somma dei quadrati dei lati è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali.*

Perocchè le diagonali AC, BD (fig. 115) si tagliano scambievolmente per metà nel punto E (52, 1); dunque, pel teorema qui dimostrato, nel triangolo ABC si ha

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AE}^2 = 2\overline{BE}^2.$$

Il triangolo ADC dà parimente

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{DE}^2.$$

Sommando membro a membro, ed osservando che BE = DE, si avrà

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 = 4\overline{AE}^2 + 4\overline{DE}^2.$$

Ma $4\overline{AE}^2$ è il quadrato di 2AE ovvero di AC; $4\overline{DE}^2$ è il quadrato di BD; dunque la somma dei quadrati dei lati è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali.

PROPOSIZIONE XVI. — *TEOREMA.*

La linea retta menata in un triangolo parallelamente ad un lato divide i due rimanenti lati in parti proporzionali.

Nel triangolo ABC (fig. 114) sia tirata DE parallela al lato BC; dico che si avrà AD : DB :: AE : EC.

Si congiunga BE e DC; i due triangoli BDE, DEC hanno la stessa base DE, e la stessa altezza, poichè i vertici B e C sono situati sopra una medesima parallela alla base; dunque questi triangoli sono equivalenti (prop. 2).

Ciò posto, i triangoli ADE, BDE, il cui vertice comune è E, hanno la medesima altezza, eppcrò stanno fra loro come le basi AD, DB; così si ha

ADE : BDE :: AD : DB.

I triangoli ADE, DEC, il cui vertice comune è D, hanno similmente la stessa altezza, e quindi stanno fra loro come le basi AE, EC; il che si esprime colla proporzione

ADE : DEC :: AE : EC.

Ma il triangolo BDE si è dimostrato equivalente al triangolo DEC; dunque a cagione del rapporto comune in queste due proporzioni, se ne deduce

AD : DB :: AE : EC.

Corollario I. Facendo il *componendo* in quest' ultima proporzione si ha AD + DB : AD :: AE + AC : AC, ovvero AB : AD :: AC : AE; ed anche sarà AB : BD :: AC : CE.

II. *Se tra due linee rette* AB, CD (fig. 115) *si menino quante parallele si vogliano* AC, EF, GH, BD, ec; *queste due rette saranno tagliate in parti proporzionali e si avrà* AE : CF :: EG : FH :: GB : HD.

Infatti sia O il punto dove queste rette AB, CD s'incontrano;

nel triangolo OEF, nel quale la linea retta AC è menata parallelamente al lato EF, si avrà OE : AE :: OF : CF, ovvero OE : OF : AE : CF. Nel triangolo OGH, si avrà similmente OE : OF :: EG : FH, dunque, a cagione del rapporto comune : OE : OF, queste due proporzioni dànno AE : CF :: EG : FH. Nello stesso modo si dimostrerà che EG : FH :: GB : HD, o così di seguito; dunque le rette AB, CD sono tagliate in parti proporzionali dalle parallele AC, EF, GH, ec.

Se poi le rette AB, CD fossero parallele, allora, nascendo tanti parallelogrammi, i cui lati opposti sono uguali, quelle proporzioni sono medesimamente vere, anzi si cangiano in altrettanti identità.

PROPOSIZIONE XVII. — *TEOREMA.*

Reciprocamente se una linea retta divide in parti proporzionali due lati di un triangolo, sarà parallela al terzo lato.

Nel triangolo ABC (fig. 116) si abbia AD : DB :: AE : EC; dico che DE è parallela a BC.

Imperocchè se non è, supponiamo che DO ne sia una; allora, secondo il teorema precedente, si avrà AD : DB :: AO : OC. Ma, per ipotesi, AD : DB :: AE : EC; dunque avrebbesi AO : OC :: AE : EC; proporzione impossibile, perocchè da una parte l'antecedente AE è maggiore di AO, dall'altra il conseguente EC è minore di OC; dunque la parallela a BC tirata dal punto D non può essere differente da DE; dunque DE è questa parallela.

Scolio I. La conclusione sarebbe la stessa se si supponesse la proporzione AB : AD :: AC : AE. Perocchè questa proporzione darebbe AB — AD : AD :: AC — AE : AE, o BD : AD :: CE : AE.

II. *Congiungendo a due a due i punti medi dei lati di un triangolo, questo triangolo sarà diviso in quattro triangoli uguali; e ciascuno di essi sarà equilatero isoscele, o scaleno, secondo ch'è equilatero, isoscele o scaleno il triangolo totale.* [1]

[1] Anzi non solamente ciascuno di quei quattro triangoli è della stessa specie del totale, ma gli è ancora simile. Ma ciò non potevasi mettere nell'enunciato, non essendosi ancora fatto parola dei triangoli simili.

Infatti essendo così divisi a due a due i lati in parti proporzionali, le congiungenti ED, EF, DF (fig. 121) sono rispettivamente parallele ai lati BC, AC, AB. Così, paragonando a due a due i quattro triangoli AED, EDF, BEF, DFC, si trovano sempre equilateri fra loro, a cagione dei parallelogrammi AEFD, EBFD, EFCD, nei quali i lati opposti sono uguali; dunque questi quattro triangoli sono fra loro uguali.

E poi facilissimo di vedere che secondo che il triangolo ABC sarà equilatero, isoscele o scaleno, ciascuno di questi quattro triangoli sarà similmente equilatero isoscele o scaleno.

III. *Congiungendo i punti di mezzo dei lati adiacenti di un quadrilatero qualunque, nasce sempre un parallelogrammo.* Infatti tirando una diagonale, essendo da una parte e dall' altra di essa divisi proporzionalmente i due lati che metton capo alle sue estremità, le congiungenti saranno parallele alla diagonale ch' è base comune dei due triangoli, e quindi parallele fra loro.

PROPOSIZIONE XVIII. — *TEOREMA.*

La linea retta che divide per metà l'angolo di un triangolo, divide il lato opposto a questo angolo in due segmenti proporzionali ai due lati adiacenti.

Nel triangolo BAC (fig. 117) la linea retta AD divida l'angolo BAC per metà; dico che si avrà BD : DC :: AB : AC.

Si prolunghi AB di una quantità AE = AB, e si congiunga EC. Nel triangolo isoscele AEC si avrà l'angolo AEC = ACE; ma l'angolo esterno BAC = AEC + ACE = 2ACE; dunque ECA = CAD ch'è, per ipotesi metà di BAC; ma questi angoli sono alterni; dunque AD e parallela ad EC, e quindi si avrà la proporzione

BD : DC :: BA : AE;

e sostituendo ad AE la sua uguale AC, sarà, come si voleva dimostrare

BD : DC :: AB : AC.

Scolio I. Si è già veduto un caso particolare di questa proposizione nel primo libro quando si è detto che la linea retta che divide l'angolo al vertice di un triangolo isoscele in due parti uguali, divide anche per metà la base.

II. La reciproca della proposizione presente è anche vera, cioè *se si divida un lato di un triangolo in due parti proporzionali ai due lati adiacenti, la linea retta che congiunge il punto di sezione col vertice dell'angolo opposto dividerà questo angolo per metà.*

Fatta la medesima costruzione, la dimostrazione sarà manifesta.

PROPOSIZIONE XIX. — *TEOREMA.*

Due triangoli simili, cioè equiangoli, hanno i lati omologhi proporzionali.

Siano ABC, CDE (fig. 119) due triangoli che abbiano i loro angoli rispettivamente uguali, cioè BAC=CDE, ABC=DCE, e quindi ACB = DEC; io dico che i lati omologhi cioè adiacenti agli angoli ugnali sono proporzionali, in modo che si avrà BC : CE :: AB : CD :: AC : DE.

Si dispongano per dritto l'uno appresso dell'altro i lati omologhi BC, CE, e si prolunghino i lati BA, ED fino a che s'incontrino, com' è chiaro che dovranno fare, in un punto F.

Sendo BCE una linea retta, e l'angolo BCA=CED, cioè l'esterne uguale all'interno ed opposto, ne segue che AC è parallela a DE. Parimente, poichè l'angolo ABC=DCE, AB è parallela a DC; dunque il quadrilatero ACDF è un parallelogrammo. Ora nel triangolo BFE la linea retta AC è parallela al lato FE, e quindi si ha BC : CE :: BA : AF (prop. 16). In luogo di AF mettendo la sua uguale CD, si avrà BC : CE :: BA : CD.

Nel medesimo triangolo BFE, si ha CD parallela al lato BF, e quindi si ha la proporzione BC : CE :: FD : DE. In luogo di FD mettendo la sua uguale AC, si avrà

BC : CE :: AC : DE.

Finalmente da queste due proporzioni che hanno il rapporto : BC : CE di comune, si cava l'altra proporzione

AC : DE :: BA : CD.

Adunque i due triangoli simili BAC, CDE, hanno i lati omologhi proporzionali.

Scolio. Si osservi che nei triangoli simili i lati omologhi sono opposti agli angoli uguali; così essendo l'angolo ACB = DEC, il lato AB è omologo a DC; parimente AC e DE sono omologhi come opposti agli angoli uguali ABC, DCE; dunque conoscendosi gli angoli uguali, si conosceranno così i lati omologhi, e si formeranno tosto le proporzioni :

AB : DC :: AC : DE :: BC : CE.

PROPOSIZIONE XX. — *TEOREMA.*

Due triangoli che hanno i lati omologhi proporzionali sono equiangoli e quindi simili.

Suppongasi che si abbia BC : EF :: AB : DE :: AC : DF (fig. 120); dico che i triangoli ABC, DEF avranno gli angoli uguali, cioè A = D, B = E, C = F.

Facciasi al punto E l'angolo FEG = B, e al punto F l'angolo EFG = C, il terzo G sarà uguale al terzo A, e i due triangoli ABC, EFG saranno equiangoli; dunque si avrà, pel teorema precedente, BC : EF :: AB : EG; ma per ipotesi, BC : EF :: AB : DE; dunque EG = DE. Si avrà pure, per lo stesso teorema, BC : EF :: AC : FG; ora si ha, per ipotesi, BC : EF :: AC : DF; dunque FG = DF; dunque i triangoli EGF, DEF hanno i loro tre lati rispettivamente uguali, epperò sono uguali. Ma, per costruzione, il triangolo EGF è equiangolo al triangolo ABC; dunque anche i triangoli DEF, ABC sono equiangoli cioè simili, come bisognava dimostrare.

Scolio I. Da queste due ultime proposizioni è manifesto che nei triangoli l'uguaglianza degli angoli è una conseguenza della proporzionalità dei lati, e reciprocamente. Il simile non avviene nei

poligoni di più di tre lati; come già si è veduto chiaramente nelle definizioni.

II. Le due proposizioni precedenti insieme con quella del quadrato dell'ipotenusa, sono le più momentose e le più feconde della geometria; esse bastano quasi sole a tutte le applicazioni ed alla risoluzione di tutti i problemi. La ragione è che tutti i poligoni possono dividersi in triangoli, ed un triangolo qualunque in due triangoli rettangoli, dei quali esso è la somma o la differenza. E così le proprietà generali dei triangoli racchiudono implicitamente quelle di tutti i poligoni.

III. Si noti qui che gli angoli uguali sono opposti ai lati proporzionali; il che forma la proposizione reciproca dello scolio del teorema precedente.

PROPOSIZIONE XXI. — *TEOREMA.*

Due triangoli che hanno un angolo uguale ad un angolo e i lati che comprendono il primo, proporzionali ai lati che comprendono il secondo, sono simili.

Sia l'angolo A=D (fig. 122), e suppongasi che si abbia AB : DE :: AC : DF; dico che il triangolo ABC è simile al triangolo DEF.

Prendasi AG = DE ed AH = DF, e congiungasi GH; essendo l'angolo A=D, e i due lati AG, AH rispettivamente uguali ai due DE, DF, i due triangoli AGH, DEF sono uguali. Ora essendo, per ipotesi, AB : DE :: AC : DF; sostituendo a DE, DF le loro uguali AG, AH, si avrà AB : AG :: AC : AH; dunque GH è parallela a BC (prop. 17), epperò l'angolo esterno AGH è uguale all'interno ed opposto B, e parimente AHG = C; dunque il triangolo AGH, e quindi anche il suo uguale DEF è simile ad ABC, come bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XXII. — *TEOREMA.*

Due triangoli che hanno i loro lati rispettivamente paralleli, o rispettivamente perpendicolari sono simili.

1.° Se il lato AB (fig. 123) è parallelo a DE, e BC ad EF, l'angolo ABC sarà uguale a DEF (28, 1); se di più AC è parallelo a DF, l'angolo ACB sarà uguale a DFE, ed anco BAC a EDF; dunque i triangoli ABC, DEF sono equiangoli; dunque essi sono simili.

2.° Sia il lato DE (fig. 124) perpendicolare ad AB; ed il lato DF ad AC; nel quadrilatero AIDH i due angoli I ed H saranno retti; i quattro angoli valgono insieme quattro angoli retti (26, 1); dunque i due rimanenti IAH, IDH, presi insieme, valgono due angoli retti. Ma i due angoli EDF, IDH, come adiacenti, valgon pure due angoli retti; dunque l'angolo EDF è nguale ad IAH o BAC; parimente se il terzo lato EF è perpendicolare al terzo BC, si dimostrerà che l'angolo DFE=C, e DEF=B; dunque i due triangoli ABC, DEF, i quali hanno i lati rispettivamente perpendicolari sono simili.

Scolio I. Nel caso dei lati paralleli, i lati omologhi sono i lati paralleli, e in quello dei lati perpendicolari, sono i lati perpendicolari; infatti i lati omologhi sono quelli che si oppongono agli angoli uguali; ora nei due casi accennati si vede che agli angoli uguali si oppongono appunto i lati paralleli o perpendicolari.

Il caso dei lati perpendicolari potrebbe offrire una situazione relativa dei due triangoli differente da quella ch'è supposta nella fig. 124; ma l'uguaglianza degli angoli rispettivi si dimostrerebbe sempre sia con quadrilateri come AIDH, di cui due angoli sono retti, sia col paragone di due triangoli che, con angoli opposti al vertice, avrebbero ciascuno un angolo retto. Del resto, si potrebbe sempre supporre che siasi costruito dentro del triangolo ABC un triangolo DEF, i cui lati siano paralleli a quelli del triangolo che si paragona ad ABC; ed allora la dimostrazione rientrerebbe nel caso della fig. 124.

II. Dalla proposizione dimostrata è chiaro che se abbiansi due triangoli simili e si disponga un lato dell'uno perpendicolarmente

o parallelamente al suo omologo nell'altro, gli altri due lati del primo si disporranno anche rispettivamente perpendicolari o paralleli ai loro omologhi nel secondo.

PROPOSIZIONE XXIII. — *TEOREMA.*

Le linee rette menate come si voglia in un triangolo dal vertice di un angolo qualunque dividono il lato opposto a questo angolo ed ogni sua parallela compresa fra gli altri due lati in parti proporzionali.

Nel triangolo ABC (fig. 125) sia DE parallela a BC, e dal vertice A dell'angolo opposto siano condotte comunque le rette AF, AC, ec.; dico che si avrà DI : BF :: IK : FG :: KL : GH, ec.

Perocchè, essendo DI parallela a BF, il triangolo ADI è equiangolo ad ABF, e si ha la proporzione DI : BF :: AI : AF ; parimente IK essendo parallela ad FG, si ha AI : AF :: IK : FG; dunque a cagione della ragione di comune AI : AF, si avrà DI : BF :: IK : FG. Si troverà similmente IK : FG :: KL : GH, ec; dunque la linea retta DE è divisa nei punti I, K, L, come il lato E nei punti F, G, H.

Corollario. Dunque se BC fosse divisa in parti uguali nei punti F, G, H, la parallela DE sarebbe divisa parimente in parti uguali nei punti I, K, L. [1]

PROPOSIZIONE XXIV. — *TEOREMA.*

Se in un triangolo rettangolo dal vertice dell'angolo retto si abbassi la perpendicolare sull'ipotenusa, i due triangoli parziali che nasceranno saranno simili al tutto, e quindi anche simili fra di loro.

Imperocchè i triangoli BAD, BAC (fig. 126) hanno l'angolo comune B; di più l'angolo BDA=BAC perchè ambidue retti; dunque

[1] Su questo principio è fondata la costruzione delle *scale*; ma noi non c'intratteremo su di ciò, per non fare gettito di tempo in cose superflue; bensì indirizzeremo i nostri lettori al Francœur (Cours complet de Mathem. pures. Géom. n° 220), o al Lacroix (Géométrie, n° 71).

il terzo BAD dell'uno è uguale al terzo C dell'altro; dunque questi due triangoli sono equiangoli e quindi simili. In simil modo si dimostrerà che il triangolo DAC è simile al triangolo BAC; dunque i tre triangoli sono equiangoli e però simili fra di loro.

Corollario I. Poichè il triangolo BAD è simile al triangolo BAC, i loro lati omologhi sono proporzionali. Ora il lato BD del triangolo minore è omologo a BA nel maggiore, perchè essi sono opposti agli angoli uguali BAD, BCA; l'ipotenusa BA del primo è omologa all'ipotenusa BC del secondo; dunque si può formare la proporzione $BD : BA :: BA : BC$. Si avrebbe similmente $DC : AC :: AC : BC$; dunque *ciascuno dei cateti* AB, AC *è media proporzionale tra l'ipotenusa e il segmento adiacente a questo lato.*

II. La simiglianza dei triangoli ABD, ADC, dà, paragonando i lati omologhi $BD : AD :: AD . DC$; dunque *la perpendicolare* AD *è media proporzionale tra i segmenti* BD, DC *dell'ipotenusa.*

III. La proporzione $BD : AB :: AB : BC$ dà, uguagliando il prodotto degli estremi a quello dei medi, $\overline{AB}^2 = BD \times BC$. Si ha parimente $\overline{AC}^2 = DC \times BC$, dunque $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BD \times BC + DC \times BC$; il secondo membro è lo stesso che $(BD + DC) \times BC$, e si riduce a $BC \times BC$ ovvero $\overline{BC}^2$; dunque si ha $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$. Epperò *in un triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei cateti.*

IV. Le uguaglianze $\overline{AC}^2 = DC \times BC$, e $\overline{AB}^2 = BD \times BC$, ci dànno $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: DC : BD$; cioè *in un triangolo rettangolo i quadrati dei cateti stanno fra loro come i segmenti adiacenti*

V. La proporzione qui trovata $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC$, *componendo*, ci dà $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 : \overline{AC}^2 :: BD + DC : DC$, ovvero $\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 :: BC : DC$; dunque *il quadrato dell'ipotenusa sta al quadrato di un cateto come l'ipotenusa sta al segmento adiacente a questo cateto.*

Scolio. Tutti questi corollari formano la proposizione XI con tutti i suoi corollari, e noi ci saremmo perciò dispensati di ripeterli qui nuovamente, se non avessimo dovuto ciò fare a fine che il lettore ponesse mente ad alcune osservazioni di non lieve momento.

La prima è che la proposizione del quadrato dell'ipotenusa è, a parlar propriamente, una conseguenza della proporzionalità dei lati nei triangoli equiangoli. Di maniera che le proposizioni

fondamentali della geometria riduconsi, per dir così, a questa sola, che i triangoli equiangoli hanno i lati omologhi proporzionali.

L'altra è che spesse volte accade, come se n'è veduto qui un esempio, che ricavando alcune conseguenze da una o da più proposizioni, si ricade sopra alcune proposizioni già dimostrate. In generale ciò che precipuamente caratterizza i teoremi geometrici, e ch'è una prnova incontrastabile della loro certezza, si è che combinandoli fra loro in un modo qualunque, purchè i ragionamenti che si fanno siano leggittimi, si giunge sempre a risultamenti esatti. Il simile non accadrebbe se qualche proposizione fosse falsa, o non fosse che presso a poco vera; così avverrebbe spesso, che, combinando le proposizioni fra loro, l'errore accrescerebbesi e diverrebbe sensibile. Esempi di ciò veggonsi in tutte quelle proposizioni nelle quali si fa uso della *riduzione all'assurdo*. Queste dimostrazioni, nelle quali si ha per fine di provare che due quantità sono ugnali, consistono nel far vedere, che se fosse fra loro la minima disuguaglianza, sarebbesi condotti dal progresso del ragionamento in un'assurdità manifesta e palpabile; onde si è forzati a conchiudere che queste due quantità sono uguali.

Corollario. Se da un punto A (fig. 127) della circonferenza si menino le duo corde AB, AC alle estremità del diametro BC, il triangolo BAC sarà rettangolo in A (16, 2); dunque 1° *la perpendicolare* AD *abbassata da un punto qualunque della circonferenza sul diametro è media proporzionale tra i due segmenti* BD, DC *del diametro*.

2° *La corda* AB *è media proporzionale tra il diametro* BC *ed il segmento adiacente* BD, o, che torna lo stesso, $\overline{AB}^2 = BD \times BC$. Si ha parimenti $\overline{AC}^2 = CD \times BC$. Da queste uguaglianze si ricaverà anche, come prima $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC$, $\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 :: BC : AB$.

PROPOSIZIONE XXV. — *TEOREMA.*

Due triangoli che hanno un angolo uguale ad un angolo stanno fra loro come i rettangoli dei lati che comprendono questi angoli.

In questo caso i due triangoli ABC, ADE (fig. 128) possono esser disposti in modo che abbiano l'angolo A di comune; io dico che si avrà ABC : ADE :: AB $\times$ AC : AD $\times$ AE.

Si tiri BE; i due triangoli ABE, ADE, che hanno il vertice di comune E, hanno pure la medesima altezza; quindi stanno fra loro come le basi AB, AD (prop. 6), e si ha così la proporzione

$$ABE : ADE :: AB : AD.$$

Si ha parimente

$$ABC : ABE :: AC : AE.$$

Moltiplicando queste due proporzioni per ordine ed omettendo il fattore ABE che vien comune ai termini della prima ragione, si avrà

$$ABC : ADE :: AB \times AC : AD \times AE.$$

Corollario I. Dunque i due triangoli sarebbero equivalenti, se il rettangolo AB$\times$AC fosse uguale al rettangolo AD $\times$ AE, ovvero se si avesse AB : AD :: AE : AC, il che avrebbe luogo se la linea retta DC fosse parallela a BE. Si può dunque stabilire che *due triangoli che hanno un angolo uguale ad un angolo e i due lati che comprendono il primo reciprocamente proporzionali ai due lati che comprendono il secondo, sono equivalenti.* Nella quale proporzione s'inchiudono manifestamente quest'altre due: 1. *Se due triangoli equivalenti hanno un angolo uguale ad un angolo, avranno i due lati che comprendono il primo reciprocamente proporzionali ai due che comprendono il secondo*; 2. *se due triangoli equivalenti hanno due*

lati reciprocamente proporzionali a due lati, sarà l'angolo compreso dai due primi uguale all'angolo compreso dai due secondi.

II. Lo stesso avviene dei parallelogrammi, cioè *due parallelogrammi che hanno un angolo uguale, stanno fra loro come i rettangoli dei lati che comprendono questo angolo.* Infatti, siccome la diagonale divide in due parti uguali un parallelogrammo, così si avrà che i due parallelogrammi staranno come i due triangoli loro metà che hanno quell'angolo uguale; dunque ec.

Di qui segue anche, come dei triangoli, che *due parallelogrammi che hanno un angolo uguale compreso fra lati reciprocamente proporzionali sono equivalenti, e reciprocamente due parallelogrammi equivalenti che hanno un angolo uguale, avranno i lati che comprendono questo angolo reciprocamente proporzionali.*

Scolio. I casi particolari che i triangoli o i parallelogrammi siano equivalenti, come le reciproche, potrebbonsi anche dimostrare indipendentemente come ha fatto Euclide nelle proposizioni XIV e XV del suo libro VI; il quale Euclide per altro male ha fatto di non considerar prima il caso generale che i triangoli o i parallelogrammi avessero solamente un angolo uguale.

PROPOSIZIONE XXVI.— *TEOREMA.*

Due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

Siano i due triangoli simili ABC, DEF (fig. 122); questi avranno l'angolo A=D, e i lati che comprendono il primo proporzionali a quelli che comprendono il secondo. Dall'uguaglianza dei due angoli A e D si ha, pel teorema precedente, la proporzione

$$ABC : DEF :: AB \times AC : DE \times DF;$$

e per la proporzionalità dei lati che comprendono questi angoli, si ha l'altra proporzione

$$AB : DE :: AC : DF.$$

Se si moltiplichi quest'ultima proporzione termine a termine per la identica

$$AC : DF :: AC : DF,$$

ne risulterà

$$AB \times AC : DE \times DF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

Dunque

$$ABC : DEF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

E però due triangoli simili ABC, DEF, stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi AC, DF, o come i quadrati di due altri lati omologhi qualunque.

Scolio. Per esempio, se il lato AC fosse doppio di DF, il triangolo ABC sarebbe quadruplo di DEF; parimente se si avesse AC=3DF, sarebbe ABC=9DEF, ec.

PROPOSIZIONE XXVII. — *TEOREMA*.

Due poligoni simili hanno gli angoli rispettivamente uguali e i lati omologhi proporzionali.

Siano i due poligoni ABCDE, FGHIK (fig. 129) simili, cioè siano i tre triangoli ABC, CAD, DAE simili ai tre FGH, FHI, FKI, e similmente disposti, cioè ABC simile ad FGH, ACD ad FHI ed ADE ad FKI; dico che questi due poligoni sono equiangoli fra loro ed hanno i lati omologhi proporzionali.

Infatti per la simiglianza dei rispettivi triangoli si ha l'angolo B=G; di più, essendo BCA=GHF e ACD=FHI, si avrà BCA+ACD=GHF+FHI, cioè BCD=GHI; similmente si dimostrerà CDE=HIK; E=K e BAE=GFK; onde i due poligoni sono equiangoli.

Ancora per la simiglianza dei triangoli si ha AB : FG :: BC : GH (prop. 19); di più BC :: GH : AC : FH ed AC : FH :: CD : HI; dunque BC : GH :: CD : HI; similmente si dimostrerà CD : HI :: DE : IK

e DE : IK :: AE : FK ; ora è visibile che questi lati proporzionali sono omologhi cioè adiacenti agli angoli che si sono dimostrati uguali.

Dunque due poligoni simili hanno gli angoli rispettivamente uguali e i lati omologhi proporzionali.

Scolio. Da questa proposizione si vede come siano possibili due poligoni equiangoli fra loro che abbiano i lati omologhi proporzionali. Ciò è pure manifesto dalla proposizione seguente: *Se si prenda un punto qualunque dentro di un poligono, e congiuntolo con tutti i vertici del poligono, si prendano sulle congiungenti, prolungate anche se si voglia, altrettante parti proporzionali ad esse congiungenti e si uniscano successivamente a due a due le estremità di queste parti proporzionali, si formerà un poligono che avrà gli angoli rispettivamente uguali agli angoli del primo ed i lati proporzionali.* Infatti i lati di questo secondo poligono vengono ad essere basi di triangoli in cui gli altri due lati sono divisi in parti proporzionali ai lati del primo, quando le parti proporzionali siano maggiori delle congiungenti; quando siano minori, al contrario i lati del primo sono le basi; nell'uno e nell'altro caso i lati del secondo sono paralleli a quelli del primo (prop. 17), epperò i due poligoni sono equiangoli fra loro; quindi anche i lati del primo sono proporzionali a quelli del secondo. Da ciò pure si può vedere che due poligoni equiangoli per avere lati proporzionali, questi lati debbono essere gli omologhi [1].

PROPOSIZIONE XXVIII. — *TEOREMA.*

Reciprocamente se due poligoni abbiano gli angoli rispettivamente uguali ed i lati omologhi proporzionali sono simili.

I due poligoni ABCDE, FGHIK (fig. 129) abbiano gli angoli rispettivamente uguali, cioè B=G, BCD=GHI, ec., ed i lati proporzionali cioè AB : FG::BC : GH::CD : HI ec.; io dico che que-

[1] *Levare un piano* non significa altro se non formare un poligono simile ad un poligono segnato in questo piano. Dalla proposizione dimostrata di sopra si vedrà come dovrà procedere la costruzione quando siano fissati i punti e gli angoli sufficienti nel piano che si vuol levare.

sti due poligoni sono simili, cioè sono composti dello stesso numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno e similmente disposti.

Dal vertice dell'angolo DAE si tirino le diagonali AC, AD, e dal vertice dell'angolo uguale GFK le diagonali FH, FI.

Essendo, per ipotesi, l'angolo B=G ed AB : FG :: BC : GH, i due triangoli ABC, FGH sono simili (prop. 21); dunque l'angolo BCA=GHF; sottratti questi dagli uguali BCD, GHI, i residui ACD, FHI saranno uguali; di più BC : GH :: AC : FH; ma, per ipotesi, BC : GH :: CD : HI; dunque AC : FH :: CD : HI; epperò i due triangoli ACD, FHI sono simili; in ultimo si vede, come pei primi triangoli, che ADE è simile ad FKI. Dunque due poligoni che abbiano i loro angoli rispettivamente uguali, ed i lati omologhi proporzionali, sono composti dello stesso numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno e similmente disposti, cioè sono simili.

Scolio I. Dalla simiglianza dei triangoli di cui si scompongono i poligoni simili, si vede che due diagonali omologhe AC, FH, cioè che congiungono i vertici di angoli omologhi sono proporzionali a duo lati omologhi qualunque. [1]

II. Si è veduto già che se n è il numero dei lati di un poligono $2n-3$ è il numero delle condizioni necessarie e sufficienti perchè un altro poligono gli sia uguale; ora nei poligoni simili vi è un lato ad arbitrio; dunque se n è il numero dei lati di un poligono $2n-4$ è il numero delle condizioni necessarie e sufficienti perchè un altro poligono gli sia simile. Ed infatti tante sono appunto le condizioni che s'inchiudono nella definizione da noi data dei poligoni simili. Noi abbiamo detto che due poligoni simili sono quelli che sono composti di un medesimo numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno, similmente disposti, e formati dalle diagonali tirarato dal vertice di un medesimo angolo; ora se n è il numero dei lati di un poligono, $n-2$ è il numero di questi tali triangoli, e le condizioni della simiglianza di due rispettivi di essi sono 2, cioè che abbiano due angoli rispettivamente uguali a due angoli; dun-

[1] È facile dimostrare dopo ciò la proposizione seguente che non abbiam messa nel testo, come non essenziale: *Se in due poligoni simili si tirino due linee rette similmente disposte, cioè che taglino proporzionalmente i lati omologhi, queste due linee rette saranno proporzionali a due lati omologhi qualunque ed ugualmente inclinate ai due lati omologhi che intersegano.*

que $2\times(n-2)$, cioè $2n-4$ è il numero delle condizioni inchiuse nella definizione per la simiglianza di due poligoni.

III. Se si voglia avere un' idea sensibile di due poligoni simili, s'immagini che un poligono qualunque sia guardato con una lente che ingrandisse o impiccolisse gli oggetti; suppongasi, per esempio, che la lente triplicasse gli oggetti; allora ciascun lato del poligono verrebbe triplicato allo sguardo; ma gli angoli non consistendo nella lunghezza dei lati rimarrebbero gli stessi; onde il poligono che si vede colla lente è equiangolo a quello che vedesi ad occhio nudo, ed ha con esso i lati omologhi proporzionali. Ora ognun sa che gli oggetti guardati con lenti d' ingrandimento o d'impiccolimento, benchè divengano più grandi o più piccoli, conservano sempre la loro forma, perchè le loro parti serbano sempre fra loro lo stesso rapporto; dunque perciò pure quei due poligoni hanno la medesima forma, e però si dicono simili.

Anche da questa idea sensibile dei poligoni simili si può comprendere perchè in due poligoni equiangoli fra loro i lati proporzionali debbono essere quelli che sono adiacenti ad angoli uguali.[1]

PROPOSIZIONE XXIX. — *TEOREMA.*

I perimetri dei poligoni simili stanno fra loro come i lati omologhi, e le loro aie come i quadrati di questi lati.

1.° Infatti supposti simili i due poligoni ABCDE, FGHIK (fig. 129), si ha per la proposizione XXVII, AB : FG :: BC : GH :: CD : HI, ec., dunque la somma degli antecedenti AB+BC+CD, ec., ch' è il perimetro del primo poligono, sta alla somma dei conseguenti FG+GH+HI, ec., ch'è il perimetro del secondo, come un antecedente sta al suo conseguente, ovvero come un lato AB sta al suo omologo FG.

2.° Sendosi supposti simili i due poligoni, i triangoli ABC, FGH sono simili; onde si avrà ABC : FGH :: $\overline{AC}^2$: $\overline{FH}^2$ (prop. 26); pa-

[1] Da quanto si è detto sui poligoni simili è palese che tutta la loro differenza sta nell'essere costruiti su differenti scale. Se queste scale fossero uguali, i poligoni diverrebbero uguali.

rimente i triangoli simili ACD; FHI danno ACD : FHI :: $\overline{AC}^2$: $\overline{FH}^2$; dunque, a cagione della ragione comune $\overline{AC}^2$: $\overline{FH}^2$, si ha

ABC : FGH :: ACD : FHI.

Con un ragionamento simile si troverebbe

ACD : FGI :: ADE : FIK.

e così di seguito, se vi fosse un maggior numero di triangoli. Da questa serie di rapporti uguali si conchiuderà la somma degli antecedenti ABC+ACD+ADE, ovvero il poligono ABCDE, sta alla somma dei conseguenti, cioè al poligono FGHIK, come un antecedente ABC sta al suo conseguente FGH, ovvero come $\overline{AB}^2$: $\overline{FG}^2$; dunque le superficie de' poligoni simili, stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

Corollario. Se si costruiscano tre poligoni simili di cui i lati omologhi siano uguali ai tre lati di un triangolo rettangolo, il poligono costruito sul lato maggiore sarà uguale alla somma degli altri due; perchè questi tre poligoni sono proporzionali ai quadrati dei loro lati omologhi; ora il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei cateti; dunque ec.

PROPOSIZIONE XXX. — *TEOREMA.*

Allorchè in un cerchio due corde s'intersegano le parti dell'una sono reciprocamente proporzionali a quelle dell'altra, ovvero il rettangolo delle parti dell'una è equivalente al rettangolo di quelle dell'altra.

Siano AB, CD (fig. 130) due corde che s'intersegano nel punto O; dico che si avrà AO : DO :: OC : OB.

Congiungansi AC e BD; nei triangoli ACO, BOD gli angoli in O sono uguali come opposti al vertice; l'angolo A è uguale all'angolo D, perchè sono iscritti nel medesimo segmento (prop. 16,2); per la medesima ragione l'angolo C=B; dunque questi triangoli

sono simili, e i lati omologhi dànno la proporzione AO : DO :: OC : OB.

Da questa proporzione si ha AO×OB=DO×OC; dunque il rettangolo delle parti dell'una corda è equivalente al rettangolo delle parti dell'altra.

PROPOSIZIONE XXXI. — *TEOREMA.*

Se da un medesimo punto preso fuori di un cerchio, si menino alcune seganti terminate all'arco concavo, le intiere seganti staranno fra loro in ragion reciproca delle loro parti esterne.

Dal punto O (fig. 131) fuori del cerchio siano condotte le seganti qualunque OB, OC terminate all'arco concavo; dico che si avrà OB : OC::OD : OA.

Infatti congiungendo AC,BD, i triangoli OAC,OBD hanno l'angolo O di comune; di più l'angolo B=C,(prop. 16,2), perchè iscritti nel medesimo segmento; dunque questi triangoli sono simili, e i lati omologhi dànno la proporzione, OB : OC :: OD : OA.

Corollario. Dunque il rettangolo OA×OB è equivalente al rettangolo OC×OD.

Scolio. Si noti la grande analogia che questa proposizione ha con la precedente; ella non ne differisce se non perchè le due corde AB, CD in cambio d'incontrarsi nel cerchio, s'incontrano di fuori. Anco la proposizione che segue può essere considerata come un caso particolare della presente.

PROPOSIZIONE XXXII. — *TEOREMA.*

Se da un medesimo punto preso fuori di un cerchio, si meni la tangente terminata al punto di contatto e una segante qualunque terminata all'arco concavo, sarà la tangente media proporzionale tra la segante e la sua parte esterna.

Sia OA (fig. 132) la tangente ed OC una segante qualunque; di-

co che si avrà $OC : OA :: OA : OD$, o, che val lo stesso, $\overline{OA}^2 = OC \times OD$.

Perocchè, congiungendo AD ed AC, i triangoli OAD, OAC, hanno l'angolo O di comune; di più l'angolo OAD formato da una tangente ed una corda, ha per misura la metà dell'arco AD (prop. 18,2), e l'angolo C ha la stessa misura; dunque l'angolo $OAD = C$; dunque i due triangoli sono simili, e quindi si ha la proporzione $OC : OA :: OA : OD$, la quale dà $\overline{OA}^2 = OC \times OD$.

N. B. Le cinque proposizioni che seguono non sono di assoluta necessità in un primo studio, al pari di tutte le altre che si troveranno in caratteri minuti. Non si sono volute però tralasciare, perchè sono sovente in uso presso i geometri. La terza, ricavata dal trattato di astronomia di Tolomeo detto, per antonomasia, dagli antichi *Almagesto*, è di grande utilità nella trigonometria. La quinta, ch'è la XXVI del libro VI di Euclide, è stata aggiunta da noi e dimostrata assai più semplicemente, perchè potrebbe fornire non poca luce in Meccanica per la dimostrazione sintetica del parallelogrammo delle forze.

PROPOSIZIONE XXXIII. — *TEOREMA.*

Se si divida un angolo di un triangolo per metà, il rettangolo dei lati che comprendono questo angolo sarà uguale al rettangolo dei segmenti dell'altro lato, più il quadrato della segante.

Sia ABC (fig. 133) un triangolo di cui l'angolo A sia diviso in due parti uguali dalla retta AD; dico che sarà $AB \times AC = BD \times DC + \overline{AD}^2$.

Si faccia passare una circonferenza pei tre punti A, B, C, si prolunghi AD fino alla circonferenza e si congiunga CE.

Il triangolo BAD è simile al triangolo EAC; poichè, per ipotesi, l'angolo $EAB = EAC$; inoltre l'angolo $B = E$, poichè hanno entrambi per misura la metà dell'arco AC; dunque i lati omologhi dànno la proporzione $BA : AE :: AD : AC$, dalla quale si ha $BA \times AC = AE \times AD$; ma $AE = AD + DE$, e moltiplicando l'un membro e l'altro per AD risulta $AE \times AD = \overline{AD}^2 + AD \times DE$; e d'altra parte $AD \times DE = BD \times DC$ (prop. 30); dunque finalmente $BA \times AC = \overline{AD}^2 + BD \times DC$.

PROPOSIZIONE XXXIV. — *TEOREMA.*

Il rettangolo di due lati di un triangolo è uguale al rettangolo del

diametro del cerchio circoscritto nella perpendicolare abbassata sul terzo lato.

Sia ABC (fig. 134) un triangolo, AD la perpendicolare abbassata dal vertice di un suo angolo A sul lato opposto BC, e CE il diametro del cerchio circoscritto; dico che si avrà AB×AC=CE×AD.

Infatti congiungendo AE, i triangoli ABD, AEC sono rettangoli, l'uno in D, l'altro in A; di più l'angolo B=E; dunque questi triangoli sono simili, e danno la proporzione AB : CE : : AD : AC; di qui risulta AB×AC=CE×AD.

Corollario. Se si moltiplichi ciascuna di queste quantità uguali per la medesima quantità BC, si avrà AB×AC×BC=CE×AD×BC. Ora AD×BC è il doppio della superficie del triangolo ABC (prop. 6); dunque *il prodotto dei tre lati di un triangolo è uguale alla sua superficie moltiplicata pel doppio del diametro del cerchio circoscritto*

Il prodotto di tre linee rette si chiama alcune volte un *solido*, per una ragione che si dirà in appresso. Il suo valore si concepisce facilmente, supponendo che le linee rette siano espresse in numeri, e moltiplicando questi tali numeri.

Scolio. Si può anche dimostrare che *la superficie di un triangolo è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio iscritto.*

Perocchè i triangoli AOB, BOC, AOC (fig. 87) i quali hanno il loro vertice comune in O, hanno così per altezza comune il raggio del cerchio iscritto; dunque la somma di questi triangoli sarà uguale alla somma delle basi AB, BC, AC, moltiplicata per la metà del raggio OD; dunque la superficie del triangolo ABC è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio iscritto.

Lo stesso avverrebbe di ogni poligono circoscrittibile al cerchio.

PROPOSIZIONE XXXV. — *TEOREMA.*

In ogni quadrilatero iscritto il rettangolo delle due diagonali è uguale alla somma dei rettangoli dei lati opposti.

Sia il quadrilatero iscritto ABCD (fig. 135); dico che sarà AC×BD=AB×CD+AD×BC.

Si prenda l'arco CO=AD, e tirisi BO che incontri in I la diagonale AC.

L'angolo ABD=CBI, perocchè l'uno ha per misura la metà di AD, e l'altro la metà di CO uguale ad AD. L'angolo ADB=BCI; perchè sono iscritti nel medesimo segmento AOB; dunque il triangolo ABD è simile al triangolo IBC, e quindi i lati omologhi danno la proporzione AD : CI : : BD : BC, donde risulta AD×BC=CI×BD. Dico ora che il triangolo ABI è simile al triangolo BDC:

perchè l' arco AD essendo uguale a CO, se aggiungasi da una parte e dall'altra OD, si avrà l' arco $AO = DC$; dunque l' angolo $ABI = DBC$; di più l'angolo $BAI = BDC$, perchè sono iscritti nel medesimo segmento; dunque i triangoli ABI, DBC sono simili ed i lati omologhi dànno la proporzione $AB : BD :: AI : CD$; donde risulta $AB \times CD = AI \times BD$.

Sommando i due risultamenti trovati, ed osservando che $AI \times BD + CI \times BD = (AI + CI) \times BD = AC \times BD$ si avrà $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$; come bisognava dimostrare.

Scolio I. Allorchè nel quadrilaterò iscritto i lati opposti fossero paralleli, esso è un rettangolo; e quindi essendo uguali le diagonali al pari che i lati opposti, l'espressione trovata si cangerà in $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; ed ecco dimostrato in altro modo per la terza volta che il quadrato dell' ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei cateti.

II. Nello stesso modo si può dimostrare un altro teorema sul quadrilatero iscritto.

Il triangolo ABD simile a BIC dà la proporzione $BD : BC :: AB : BI$; donde risulta $BI \times BD = BC \times AB$. Se si congiunga CO, il triangolo ICO simile ad ABI, sarà simile a BDC, e darà la proporzione $BD : CO :: DC : OI$, dalla quale si ricava $OI \times BD = CO \times DC$, ovvero, a cagione di $CO = AD$, $OI \times BD = AD \times DC$. Sommando i due risultamenti, ed osservando che $BI \times BD + OI \times BD$ riducesi a $BO \times BD$, si avrà $BO \times BD = AB \times BC + AD \times DC$.

Se si fosse preso $BP = AD$, e tirato CKP sarebbesi trovato con ragionamenti affatto simili $CP \times CA = AB \times AD + BC \times CD$.

Ma essendo l'arco $BP = CO$, se aggiungasi da una parte e dall'altra BC, si avrà l' arco $CBP = BCO$; dunque la corda CP è uguale alla corda BO, e per conseguenza i rettangoli $BO \times BD$ e $CP \times CA$ stanno fra loro come BD a CA; dunque

$$BD : CA :: AB \times BC + AD \times DC : AD \times AB + BC \times CD.$$

Dunque *le diagonali di un quadrilatero iscritto stanno fra loro come le somme dei rettangoli dei lati che metton capo alle loro estremità.*

Questi due teoremi possono servire a trovare le diagonali quando si conoscono i lati.

PROPOSIZIONE XXXVI. — *TEOREMA.*

Se sul raggio d'un cerchio si prenda a partire dal centro una parte ad arbitrio, e poi prolungato questo si prenda a partire anche dal centro una parte che sia terza proporzionale in ordine alla prima parte ed al raggio; dico che congiungendo un punto qualunque della circonferenza colle estremità di queste parti, le due congiun-

genti staran sempre nel medesimo rapporto, che sarà quello delle differenze delle due parti preso dal raggio.

Nel cerchio che ha per raggio CA (fig. 136) si abbia CP : CA :: CA : CQ; dico che congiungendo un punto qualunque M della circonferenza coi punti P e Q, si avrà sempre MP : MQ :: AP : AQ.

Infatti, si ha, per ipotesi CP : CA :: CA : CQ; mettendo CM in vece di CA, si avrà CP : CM :: CM : CQ; dunque i triangoli CPM, CQM, avendo un angolo uguale C compreso tra lati proporzionali sono simili (prop. 21); dunque il terzo lato MP sta al terzo MQ come CP sta a CM o CA. Ma la proporzione CP : CA :: CA : CQ dà, *dividendo*, CP : CA :: CA—CP : CQ—CA, ovvero CP: CA :: AP : AQ; dunque MP : MQ :: AP : AQ.

PROPOSIZIONE XXXVII. — *TEOREMA.*

Se dal vertice di un angolo di un parallelogrammo si prendano sui suoi lati, prolungati se si voglia, due parti proporzionali ad essi lati, e compiasi il parallelogrammo, le diagonali di questi due parallelogrammi le quali passano pel vertice di quell'angolo, sono allogate sulla medesima linea retta.

Sui lati adiacenti AD, DC (fig. 13) siano prese le parti ED, DG proporzionali a questi lati, cioè in modo che si abbia AD : ED :: DC : DG; dico che le diagonali FD, BD staranno sulla medesima linea retta.

Infatti, per la supposta proporzione e per l'angolo ADC comune, si vede che i due parallelogrammi sono simili; dunque il triangolo ABD è simile ad EFD, e quindi essendo il lato AB parallelo al suo omologo EF, gli altri due lati dovranno anche essere rispettivamente paralleli ai loro omologhi (prop. 22); ma i due omologhi BD, FD debbono passare pel medesimo punto D; dunque essi debbono essere allogati sulla stessa linea retta.

PROBLEMI RELATIVI AL LIBRO III.

PROBLEMA PRIMO

Dividere una linea retta data in un dato numero di parti uguali, o in parti proporzionali ad altre rette date.

1.° Abbiasi a dividere la linea retta AB (fig. 137) in cinque parti uguali. Da una estremità A si menerà la retta indefinita AG, inclinata comunque ad AB; indi, presa AC di una grandezza arbitraria, la si porterà cinque volte sopra AG. Fatto ciò, si congiungerà l'ultimo punto di divisione G con l'estremità B mediante la retta GB, e in ultimo si condurrà CI parallela a GB; io dico che AI sarà la quinta parte della retta data AB, in modo che portando cinque volte AI sopra AB, la retta AB sarà divisa in cinque parti uguali.

Infatti, essendo CI parallela a GB, i lati AG, AB sono tagliati in parti proporzionali nei punti C ed I (prop. 16). Ma AC è la quinta parte di AG; dunque AI è la quinta parte di AB.

2.° Sia proposto di dividere la linea retta AB (fig. 138) in parti proporzionali alle tre rette date P, Q, R. Dall' estremità A si tirerà con qualunque inclinazione alla AB l'indefinita AG, si prenderà AC=P, CD=Q, DE=R, si congiungeranno le estremità E e B, e dai punti C, D si condurranno CI, DK parallele ad EB; dico che la retta data AB sarà divisa nelle parti AI, IK, KB proporzionali alle rette date P, Q, R.

Perocchè a cagione delle parallele CI, DK, EB, le parti AI, IK, KB sono proporzionali alle parti AC, CD, DE (prop. 16), le quali tre ultime sono per costruzione uguali alle tre rette date P, Q, R.

Scolio. La prima delle costruzioni qui indicate potrebbe anche servire a dividere una linea retta in 2, 4, 16, 32 ec. parti uguali; ma in questo caso si fa uso a preferenza di quella indicata nel primo dei problemi relativi al primo libro, la quale è assai più sem-

plice, e che però si è trattata a parte, in cambio di comprenderla nel caso generale qui esposto.

PROBLEMA II

Trovare la quarta proporzionale a tre rette date.

Siano A, B, C (fig. 139) le tre rette date; e si noti che di queste rette non solamente si dee dare la grandezza, ma ben anche l'ordine, cioè deesi assegnare qual è l'antecedente della prima ragione, che qui è A; i termini medi poi si ponno dare con qualunque ordine, perchè la quarta proporzionale non cangia; così la quarta proporzionale tra le rette A, B, C è la stessa che quella tra le tre A, C, B[1]; ma se C e B non fossero entrambi medi, la quarta proporzionale cangerebbe; così la quarta proporzionale tra A, B, C è diversa di quella tra B, A e C.

Si tirino le due linee rette indefinite DE, DF che formino un angolo qualunque. Sopra DE si prenda DA=A e DB=B, su DF si prenda DC=C, si congiunga AC, e dal punto B si meni BX parallela ad AC; dico che DO sarà la quarta proporzionale cercata; perocchè, essendo BX parallela ad AC, si ha la proporzione DA : DB :: DC : DX; ora i tre primi termini di questa proporzione sono uguali alle tre linee rette date; dunque DX è la quarta proporzionale richiesta.

Corollario. Si troverà nello stesso modo la terza proporzionale alle due linee rette date A, B, perocchè essa sarà la stessa che la quarta proporzionale alle tre rette A, B, C.

Scolio I. In vece di prendere le due prime rette a partire sempre dal punto D, si potevano prendere l'una appresso dell'altra, come DB, BA; indi presa DX uguale alla terza retta data, si congiungeva BX, e poi tiravasi AC parallela a CX; e così XC era la

[1] In fatti questa quarta proporzionale nel primo caso è $\frac{B \times C}{A}$, nel secondo anche $\frac{B \times C}{A}$ i quali valori sono uguali, perchè i numeratori sono sempre il prodotto dei due fattori B, C. Il permutando che, come si sa, non cangia la proporzione, consiste appunto nel cangiar l'ordine dei termini medi.

quarta proporzionale, perchè si aveva DB : BA::DX : XC. Ma si preferisce la prima costruzione, perchè ella occupa meno luogo.

II. Anche le proposizioni XXX e XXXI del libro III ci possono fornire altri mezzi per trovare la quarta proporzionale.

Si prenderà sui lati dell'angolo qualunque AOD (fig. 130) AO uguale alla prima retta data, OD uguale alla seconda, indi prolungato OD, si prenderà OC uguale alla terza, pei punti A, D, C si farà passare una circonferenza, e prolungando AO, la parte OB sarà la quarta proporzionale cercata, perchè infatti si ha AO : OD::OC : OB.

Volendo far uso della proposizione XXXI, sui lati di un angolo qualunque O (fig. 131) si prenderà OC uguale alla prima retta data, OB uguale alla seconda ed OA uguale alla terza, e pei tre punti A, B, C si farà passare una circonferenza; così OD sarà la quarta proporzionale cercata perchè si ha infatti OC : OB :: OA : OD.

Qui si vede che l'angolo O non si dee prendere tanto grande che la retta OC risulti tangente alla circonferenza.

È chiaro però da queste ultime costruzioni che quella indicata prima è la più semplice.

PROBLEMA III

Trovare la media proporzionale tra due linee rette date.

Siano A e B (fig. 140) le due linee rette date. Sulla linea retta indefinita DF prendasi DE=A, ed EF=B; sulla linea retta totale DF come diametro, si descriva la semicirconferenza DGF, e dal punto E si elevi sul diametro la perpendicolare EG, che incontrerà la circonferenza in un punto G; dico che EG sarà la media proporzionale richiesta.

In fatti, la perpendicolare GE, abbassata da un punto della circonferenza sul diametro, è media proporzionale tra i due segmenti del diametro DE, EF (prop. 24); ora questi segmenti sono uguali alle rette date A e B.

Scolio I. Le due rette date, invece di prendersi l'una appresso

dell'altra, potevano esser prese a partire dallo stesso punto; per esempio BC (fig. 127) uguale alla prima, e BD uguale alla seconda; allora, costruito il semicerchio sulla maggiore BC, come diametro, e tirata la perpendicolare AD, la corda AB sarebbe stata media proporzionale (prop. 21).

II. In altro modo potrebbe anche trovarsi la media proporzionale per mezzo della proposizione XXXII del libro III. In un cerchio il cui diametro sia minore della retta maggiore, si adatti DC uguale alla differenza delle due rette date, e si prenda OC uguale alla retta maggiore; così OD sarà uguale alla minore; dal punto O si tiri la tangente OA, che sarà la quarta proporzionale cercata.

PROBLEMA IV

Dividere una data linea retta in due parti tali che la maggiore sia media proporzionale tra l'intiera retta e l'altra parte.

Sia AB (fig. 141) la linea retta data. Dalla estremità B si elevi alla retta AB la perpendicolare BC uguale alla metà di AB; dal punto C come centro, e col raggio CB si descriva una circonferenza; si tiri AC che incontrerà la circonferenza in D, e prendasi AF=AD; io dico che la retta AB sarà divisa nel punto F nel modo cercato, cioè che si avrà AB : AF :: AF : FB.

Peroechè AB essendo perpendicolare all'estremità del raggio CB, è una tangente; e se si prolunghi AC fino a che incontri la circonferenza in E, si avrà AE : AB :: AB : AD (prop. 32); dunque, *dividendo*, AE—AB : AB :: AB—AD : AD. Ma, poichè il raggio BC è la metà di AB, il diametro DE=AB, e quindi AE—AB=AD=AF; si ha pure, a cagione di AF=AD, AB—AD=FB; dunque AF : AB :: FB : AD ovvero AF; dunque, *invertendo*, AB : AF :: AF : FB. [1]

[1] Questo problema è un esempio notevole del modo onde l'Algebra rende anche le proposizioni sintetiche più semplici ed eleganti. Euclide lo risolve in un altro modo servendosi di una proposizione superflua di cui fa menzione nel suo secondo libro, e non vide che ci si arriva agevolmente colle proprietà delle tangenti e delle seganti.

Scolio. Questa sorta di divisione della retta AB suol dirsi in *estrema e media ragione*; se ne vedrà l'uso in appresso.

Si può anche osservare che la segante AE è pur essa divisa in estrema e media ragione nel punto D; perocchè, essendo AB=DE, si ha AE : DE :: DE : AD.

PROBLEMA V

Da un punto dato tra i lati di un dato angolo tirare una linea retta in modo che le parti comprese tra questo punto e i lati dell'angolo siano uguali tra loro.

Sia BCD (fig. 142) l'angolo dato, ed A il punto in esso. Dal punto A si conduca AE parallela a CD, e si prenda EB=CE, e pei punti B ed A tirisi BAD che sarà la retta cercata.

Perocchè, essendo AE parallela a CD, si ha BE : EC :: BA : AD; ora BE=EC; dunque BA=AD.

PROBLEMA VI

Fare un quadrato equivalente ad un parallelogrammo o ad un triangolo dato.

1.° Sia ABCD (fig. 143) il parallelogrammo dato, AB la sua base, DE la sua altezza. Tra AB e DE si trovi la media proporzionale XY; dico che il quadrato fatto sopra XY sarà equivalente al parallelogrammo ABCD. Perocchè si ha, per costruzione AB : XY :: XY :: DE; dunque $\overline{XY}^2 = AB \times DE$; ora $AB \times DE$ è la misura del parallelogrammo dato, e $\overline{XY}^2$ quella del quadrato; dunque ei sono equivalenti.

2.° Sia ABC (fig. 144) il triangolo dato, BC la sua base, AD la sua altezza. Si prenda la media proporzionale tra BC e la metà di AD, e sia questa XY; dico che il quadrato di XY sarà equivalente al triangolo ABC.

Imperocchè, avendo BC : XY :: XY : $\frac{1}{2}$ AD, se ne dedurrà $XY^2 = BC \times \frac{1}{2} AD$; dunque il quadrato fatto sopra XY è equivalente al triangolo ABC.

PROBLEMA VII

Sopra una retta data costruire un rettangolo equivalente ad un rettangolo dato.

Sia AD (fig. 145) la retta data ed ABFC il rettangolo dato. Si trovi la quarta proporzionale in ordine alle tre rette AD, AB, AC, e sia questa AX; dico che il rettangolo fatto sopra AB ed AX sarà equivalente al rettangolo ABFC.

Infatti, si ha, per costruzione, AD : AB::AC : AX, d'onde si ricava $AD \times AX = AB \times AC$; dunque il rettangolo ADEX è equivalente al rettangolo ABFC.

PROBLEMA VIII

Trovare due linee rette che stiano fra loro come il rettangolo di due rette date sta al rettangolo di due altre rette date.

Siano A e B (fig. 148) le duo prime rette date; C e D le due seconde. Sia X la quarta proporzionale in ordine a B, C, D; dico che il rapporto delle due rette A ed X sarà uguale a quello dei due rettangoli $A \times B$, $C \times D$.

Perocchè, essendo B : C::D : X, si avrà $C \times D = B \times X$; dunque $A \times B : C \times D :: A \times B : B \times X :: A : X$.

Corollario. Dunque per avere il rapporto dei quadrati fatti sulle rette A e C, si cerchi una terza proporzionale X alle rette A e C, in modo che si abbia A : C::C : X, o si avrà $A^2 : C^2 :: A : X$.

PROBLEMA IX

Trovare due linee rette che stiano fra loro come il prodotto di tre rette date sta al prodotto di altre tre rette date.

Siano A, B, C (fig. 149) le tre prime rette date, P, Q, R le tre seconde. Alle tre P, A, B si trovi la quarta proporzionale X; alle tre C, Q, R la quarta proporzionale Y. Le due rette X, Y staranno fra loro come i prodotti $A \times B \times C$, $P \times Q \times R$.

Imperocchè, essendo $P : A :: B : X$, si ha $A \times B = P \times X$, e moltiplicando da una parte e dall' altra per C, $A \times B \times C = C \times P \times X$. Parimente, essendo $C : Q :: R : Y$, si avrà $Q \times R = C \times Y$, e moltiplicando da una parte e dall'altra per P, si ha $P \times Q \times R = P \times C \times Y$; dunque il prodotto $A \times B \times C$ sta al prodotto $P \times Q \times R$ come $C \times P \times X$ sta a $P \times C \times Y$, ovvero come X sta ad Y.

PROBLEMA X

Fare un triangolo equivalente ad un poligono dato, e quindi un quadrato equivalente ad esso poligono.

Sia ABCDE (fig. 146) il poligono dato. Si tiri da prima la diagonale CE, che stacchi il triangolo CDE; pel punto D si meni DF parallela a CE fino a che incontri AE prolungata; si congiunga CF, e il poligono ABCDE sarà equivalente al poligono ABCF che ha un lato di meno.

Imperocchè i triangoli CDE, CFE hanno la base comune CE; hanno la stessa altezza, perocchè i loro vertici D ed F sono situati sopra una stessa retta DF parallela alla base; dunque questi triangoli sono equivalenti. Aggiungendo da una parte e dall'altra il poligono ABCE, si avrà da un canto il poligono ABCDE, e dall' altro il poligono ABCF che saranno equivalenti.

Si può parimente staccare l' angolo B, sostituendo al triangolo ABC l'equivalente AGC, e così il pentagono ABCDE sarà cangiato in un triangolo equivalente GCF.

Lo stesso procedimento si applicherà ad ogni altro poligono di qualunque numero di lati; perocchè è chiaro che diminuendo successivamente di un lato il poligono, si dovrà finire per giungere ad un triangolo equivalente.

Si è veduto già che ogni triangolo può essere cangiato in un quadrato equivalente (prob. 6); così dunque si troverà un quadrato equivalente ad un dato poligono; questo è quello che dicesi *quadrare* un poligono, o trovarne la *quadratura*.

Scolio. Il problema della *quadratura del cerchio* consiste a trovare un quadrato equivalento ad un cerchio, il cui diametro sia dato.

PROBLEMA XI

Formare un quadrato che sia uguale alla somma o alla differenza di due quadrati dati.

Siano A e B (fig. 147) i lati dei quadrati dati.

1.° Volendo trovare un quadrato uguale alla somma di questi quadrati, si tirino le due rette indefinite ED, EF ad angolo retto; si prenda ED=A ed EG=B, si congiunga DG, e DG sarà il lato del quadrato cercato.

Imperocchè il triangolo DEG essendo rettangolo, il quadrato fatto sopra DG è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra ED ed EG.

2.° Se abbiasi a trovare un quadrato uguale alla differenza dei quadrati dati, si faccia, come prima, l'angolo retto FEH, si prenda GE uguale al minore dei lati A e B; dal punto G, come centro, e con un raggio GH, uguale all'altro lato, si descriva un arco, che tagli EH in H; dico che il quadrato fatto sopra EH sarà uguale alla differenza dei quadrati fatti sulle rette A e B.

Infatti, il triangolo GEH è rettangolo, l'ipotenusa GH=A, e il lato GE=D; dunque il quadrato fatto sopra EH, ec.

Scolio. Si può trovare dopo ciò un quadrato uguale alla somma di quanti quadrati si vogliano, perocchè la costruzione che ne riduce due ad un solo, ne ridurrà tre a due, e questi due in uno, e così degli altri. Lo stesso avverrebbe se alcuni dei quadrati dati dovessero essere sottratti dalla somma degli altri.

Si sa già che per avere un quadrato che contenga 4, 9, 16, ec. volte un quadrato dato, il lato del primo dev' essere doppio, triplo, quadruplo, ec. di quello del secondo; la costruzione dunque è molto più semplice in questi casi. E da ciò si rende anche più semplice la costruzione per trovare un quadrato che sia quintuplo di un altro; basterà trovare un quadrato che sia la somma del quadrato dato e del suo quadruplo, cioè di quello fatto sul lato doppio; e lo stesso si dica di un altro multiplo qualunque.

PROBLEMA XI

Costruire un quadrato che stia ad un quadrato dato nella ragione di due rette date.

Siano M, N (fig. 150) le due rette date. Sulla retta indefinita EG, si prenda EF=M, ed FG=N; sopra EG, come diametro descrivasi una semicirconferenza, ed al punto F si elevi sul diametro la perpendicolare FH.

Dal punto H si menino le corde HG, HE che si prolungheranno indefinitamente; sulla prima prendasi HK uguale al lato AB del quadrato dato, e pel punto K si meni KI parallela ad EG; dico che HI sarà il lato del quadrato richiesto.

Imperocchè, a cagione delle parallele KI e GE, si ha HI : HK : : HE : HG; dunque $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 :: \overline{HE}^2 : \overline{HG}^2$; ma nel triangolo rettangolo EHG, il quadrato di HE sta al quadrato di HG come il segmento EF sta al segmento FG, o come M sta ad N; dunque $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 :: M : N$. Ma HK=AB; dunque il quadrato fatto sopra HI sta al quadrato fatto sopra AB come M sta ad N.

PROBLEMA XII

Costruire un poligono simile ad un poligono dato sopra un lato omologo a un lato di questo poligono.

Sia ABCDE (fig. 129) il poligono dato, e il lato FG omologo ad AB.

Nel poligono dato si tirino le diagonali AC, AD; al punto F si faccia l'angolo GFH = BAC, e al punto G l'angolo FGH = ABC; le rette FH, GH si taglieranno in H ed FGH sarà un triangolo simile ad ABC; parimente sopra FH, omologo, ad AC si costruisca il triangolo FIH simile ad ADC, e sopra FI, omologo ad AD, si costruisca il triangolo FIK simile ad ADE.

Il poligono FGHIK sarà il poligono richiesto simile ad ABCDE.

Infatti, questi due poligoni sono composti dello stesso numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno e similmente disposti; dun-

que, per la definizione dei poligoni simili, questi due poligoni sono simili.

PROBLEMA XIII

Dati due poligoni simili, costruire un poligono simile ad essi ed uguale alla loro somma o alla loro differenza.

Siano A e B due lati omologhi dei poligoni simili dati; si trovi un quadrato uguale alla somma o alla differenza dei quadrati fatti sopra A e B: sia X il lato di questo quadrato; X sarà il lato del poligono cercato omologo ad A e B nei poligoni dati. Si costruirà così, pel problema precedente, un poligono simile ai due dati; questo sarà il poligono cercato.

Imperocchè i poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi; ora, per costruzione, il quadrato del lato X è uguale alla somma o alla differenza dei quadrati fatti sopra i lati omologhi A e B; dunque il poligono costruito sul lato X è uguale alla somma o alla differenza dei poligoni simili costruiti sui lati A e B.

PROBLEMA XIV

Costruire un poligono simile ad un poligono dato e che stia a questo in data ragione.

La ragione data sia quella della retta M alla retta N, e sia A il lato del poligono dato, X il lato omologo nel poligono cercato; bisognerà che il quadrato di X stia al quadrato di A come M ad N, perchè i poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi. Si troverà dunque X come si è fatto nel problema XII; conoscendo X, il resto si determinerà come nel problema XIII.

PROBLEMA XV

Costruire un poligono simile ad un dato poligono ed equivalente ad un altro poligono dato.

Sia P (fig. 151) il poligono a cui si vuole simile il poligono cercato, e Q quello a cui lo si vuole equivalente. Si trovi il lato M del quadrato equivalente al poligono P e il lato N nel quadrato equivalente al poligono Q. Indi sia X la quarta proporzionale in ordine alle tre rette date M, N, AB; sul lato X, omologo ad AB, si costruisca un poligono simile al dato P, dico ch'esso di più sarà equivalente all'altro poligono dato Q.

Imperocchè chiamando Y il poligono sopra il lato X, si avrà $P : Y :: \overline{AB}^2 : \overline{X}^2$; ma per costruzione $AB : X :: M : N$, o $\overline{AB}^2 : X^2 :: M^2 : N^2$; duque $P : Y :: M^2 : N^2$. Ma si ha pure, per costruzione, $M^2 = P$ e $N^2 = Q$; dunque $P : Y :: P : Q$, e quindi $Y = Q$. Adunque il poligono Y è simile al poligono P, ed equivalente al poligono Q; come si richiedeva.

PROBLEMA XVI

Costruire un rettangolo equivalente ad un quadrato dato, ed i cui lati adiacenti facciano una somma data.

Sia AB (fig. 152) la retta, cui deve essere uguale la somma dei due lati adiacenti, e C il quadrato dato. Sopra AB, come diametro, si descriva una semicirconferenza; si meni parallelamente al diametro la retta DE ad una distanza AD uguale al lato del quadrato dato C. Dal punto E, dove la parallela taglia la circonferenza, si abbassi sul diametro la perpendicolare EF; dico che AF ed FB saranno i lati del rettangolo cercato.

Imperocchè la loro somma è uguale ad AB, e il loro rettangolo $AF \times FB$, come quello dei due segmenti del diametro, è uguale al quadrato della perpendicolare EF, ovvero al quadrato dell'uguale AD; dunque questo rettangolo è equivalente al quadrato C.

Scolio. Richiedesi, perchè il problema sia possibile, che la di-

stanza AD non sia maggiore del raggio, o che torna lo stesso, che il lato del quadrato C non ecceda la metà della retta data AB.

PROBLEMA XVIII

Costruire un rettangolo equivalente ad un quadrato dato e i cui lati adiacenti diano una data differenza.

Sia AB (fig. 153) la differenza data, e C il quadrato dato. Sopra la retta AB, come diametro, descrivasi una circonferenza; all'estremità del diametro, si tiri la tangente AD, e prendasi su di essa la parte AD uguale al lato del quadrato C; per il punto D e il centro O tirisi la segante DF; dico che DE e DF saranno i lati adiacenti del rettangolo cercato.

Imperocchè 1° la differenza di questi lati è uguale al diametro EF, ovvero AB; 2° il rettangolo DE$\times$DF è uguale ad $\overline{AD}^2$, cioè il rettangolo della segante nella sua parte esterna uguale al quadrato della tangente; dunque questo rettangolo sarà equivalente al quadrato dato C.

PROBLEMA XVIII

Trovare la comune misura, se pure ce n'abbia, tra la diagonale ed il lato del quadrato.

Sia ABCG (fig. 154) un quadrato qualunque, AC la sua diagonale.

Primamente, secondo che si è veduto nel problema XVII del libro II, bisogna portare CB sopra CA tante volte quante vi può essere contenuta, e per far ciò sia descritto col centro C e col raggio CB il semicerchio DBE; si vede che CB è contenuto una volta in AC col resto AD; il risultamento della prima operazione è dunque il quoziente 1 col resto AD, che bisognerà paragonare con BC ovvero con la sua uguale AB.

Si può prendere AF=AD, e portare realmente AF sopra AB, si troverebbe così che vi è contenuto due volte con un resto. Ora siccome questi resti ed i seguenti vanno diminuendo, e sfuggi-

ranno ben tosto per la loro picciolezza, questo che noi indichiamo sarebbe un mezzo meccanico ed imperfetto, dal quale non potrebbesi nulla concludere per decidere se le due rette AC, CB, hanno o non hanno una comune misura. Però se questo fallisce, vi è un altro metodo per il quale, evitando i resti decrescenti, si opera sopra rette che rimangon sempre della stessa grandezza.

Infatti, essendo retto l'angolo ABC, AB è una tangente, ed AE una segante menata dallo stesso punto, in modo che si ha (prop. 30) AD : AB : : AB : AE. Dunque nella seconda operazione, nella quale trattasi di paragonare AD con AB, si può, in vece del rapporto di AD ad AB, prender quello di AB ad AE; ora AB o la sua uguale CD è contenuta due volte in AE col resto AD; dunque il risultamento della seconda operazione è il quoziente 2 col resto AD che bisogna paragonare ad AB.

La terza operazione, che consiste a paragonare AD con AB, si ridurrà parimente a paragonare AB, o la sua uguale CD con AE, e si avrà puro 2 per quoziente e AD per resto.

Si vede di qui che l'operazione non sarà terminata mai, e che però non ci ha comune misura tra la diagonale e il lato del quadrato; verità ch'era già conosciuta per l'aritmetica, (perocchè queste rette stanno tra loro : : $\sqrt{2} : 1$), ma che acquista un maggior grado di chiarezza con la risoluzione geometrica.

Scolio. Adunque, essendo fra loro incommensurabili il lato del quadrato o la diagonale, è impossibile di esprimere in numeri il loro rapporto esattamente; ma si può avvicinarvisi quanto si voglia per mezzo della frazione continua ch'è uguale a questo rapporto. La prima operazione ha dato per quoziente 1; la seconda e tutte le altre all'infinito dànno 2; dunque la frazione di cui si tratta è

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{ ec. all' infinito.}}}}}}$$

Per esempio se si calcoli questa frazione fino al quarto termine inclusivamente, trovasi che il suo valore è $1\frac{12}{29}$ o $\frac{41}{29}$; di maniera che il rapporto approssimato della diagonale al lato del quadrato è quello di 41 a 29. Troverebbesi parimente un rapporto più approssimato, calcolando un maggior numero di termini.

LIBRO IV

I POLIGONI REGOLARI E LA MISURA DEL CERCHIO.

DEFINIZIONI.

I *poligoni regolari* hanno molte particolari proprietà non comuni agli altri poligoni, perchè è chiaro che quanto più particolare è una figura, più grande è il numero delle sue proprietà. In questo quarto libro è specialmente parola di essi poligoni regolari; dalla teorica dei quali si verrà poi anche ricavando quella della misura del cerchio.

È buono quindi ricordarsi quello che si è già detto innanzi, che un poligono dicesi *regolare* quando è insieme equilatero ed equiangolo; così il triangolo equilatero è quello di tre lati; il quadrato quello di quattro, ec. Questi poligoni si chiamano così perchè ci presentano infatti la forma più regolare e simmetrica, essendo da ogni parte intieramente gli stessi.

PROPOSIZIONE PRIMA. — *TEOREMA.*

Due poligoni regolari d'uno stesso numero di lati sono simili.

Siano, per esempio, i due esagoni regolari **ABCDEF**, *abcdef* (fig. 155); la somma degli angoli è la stessa nell'uno e nell'altro poligono; è uguale ad otto angoli retti (26, 1). L'angolo **A** è la sesta parte di questa somma, al pari dell'angolo *a*; dunque i due angoli **A** ed *a* sono uguali; lo stesso avviene degli angoli **B** e *b*, degli angoli **C** e *c*, ec.

Inoltre, poichè per la natura di questi poligoni, i lati AB, BC, CD, ec. sono uguali, come pure ab, bc, cd, ec., è chiaro che si avranno le proporzioni AB : ab : : BC : bc : : CD : cd, ec.; dunque i due poligoni di cui si tratta hanno gli angoli uguali ed i lati omologhi proporzionali; dunque essi sono simili.

Corollario. Adunque i perimetri dei poligoni regolari di uno stesso numero di lati stanno fra loro come i lati omologhi, e le loro aie come i quadrati di questi lati.

Scolio I. L'angolo di un poligono regolare si determina come quello di un poligono equiangolo (26, 1).

II. Dopo questa proposizione le espressioni *poligoni regolari simili*, e *poligoni regolari dello stesso numero di lati* si debbono avere per equivalenti.

PROPOSIZIONE II. — *TEOREMA*.

Ogni poligono regolare può essere iscritto nel cerchio, come anche può esservi circoscritto.

Sia ABCDE, ec. (fig. 156) il poligono di cui si tratta; s'immagini che facciasi passare una circonferenza pei tre punti A, B, C; sia O il suo centro, ed OP la perpendicolare abbassata sul punto medio del lato BC; si congiunga AO ed OD.

Il quadrilatero OPCD può essere sovrapposto al quadrilatero OPBA; infatti il lato OP è comune, l'angolo OPC=OPB, come retti; dunque il lato PC si applicherà sul suo uguale PB, e il punto C cadrà in B. Inoltre, per la natura del poligono, l'angolo PCD=PBA, dunque CD prenderà la direzione BA, e per essere CD = BA, il punto D cadrà in A, e così i due quadrilateri combaceranno interamente l'uno con l'altro. La distanza OD è dunque uguale ad AO, e per conseguenza la circonferenza che passa pei tre punti A, B, C, passerà eziandio pel punto D. Con un ragionamento simile si proverà che la circonferenza che passa pei trè vertici B,C,D, passerà pel vertice seguente E, e così di seguito; laonde la medesima circonferenza che passa per tre vertici di un poligono regolare, passerà necessariamente per tutti gli altri, ch'è quanto dire che ogni poligono regolare può essere iscritto nel cerchio.

In secondo luogo, per rapporto a questa circonferenza, tutti i lati AB, BC, CD, ec. sono corde uguali; elle sono dunque ugualmente distanti dal centro (8, 2); dunque se dal punto O come centro, e col raggio OP si descriva una circonferenza, questa toccherà il lato BC e tutti gli altri lati del poligono ciascuno nel suo punto medio, e la circonferenza sarà iscritta nel poligono, o il poligono circoscritto alla circonferenza.

Scolio I. Il punto O, centro comune del cerchio iscritto, può riguardarsi anche come il centro del poligono, e per tal ragione chiamasi angolo al centro l'angolo AOB formato dai due raggi condotti alle estremità di un medesimo lato AB.

Poichè tutte le corde AB, BC, ec. sono uguali, è chiaro che tutti gli angoli al centro sono uguali, ed anco che il valore di ciascuno si trova dividendo quattro angoli retti pel numero dei lati del poligono.

II. Per iscrivere un poligono regolare di un certo numero di lati in una data circonferenza, non trattasi che di dividere la circonferenza in tante parti uguali quanti lati dee avere il poligono; perocchè essendo gli archi uguali, le corde AB, BC, CD, ec. saranno uguali; i triangoli ABO, BOC, COD, ec. saranno anco uguali, per essere fra loro equilateri; dunque tutti gli angoli ABC, BCD, CDE, ec. saranno uguali; dunque la figura ABCDE, ec. sarà un poligono regolare.

PROPOSIZIONE III. — *TEOREMA.*

Il lato del quadrato iscritto sta al raggio come la radice quadrata di 2 sta all'unità. [1]

Primieramente per iscrivere il quadrato, si tirino i due diametri AC, BD (fig. 157) i quali si taglino ad angoli retti, e si congiungano le estremità A, B, C, D. Gli angoli AOB, BOC, ec. essen-

[1] La ragione per la quale noi presentiamo questa proposizione e le seguenti come teoremi, e non come problemi, secondo che fa il Legendre, si è che i giovani, menando le enunciazioni a memoria, si troveranno così conoscere meglio i rapporti dei vari poligoni regolari che si sanno inscrivere, al raggio, che se trovassero questi rapporti negli scolii.

do uguali, le corde AB, BC, ec. sono uguali, epperò, essendosi divisa la circonferenza in quattro parti uguali, ABCD sarà il quadrato iscritto.

Ora il triangolo rettangolo BOC essendo isoscele, ci dà BC : BO::$\sqrt{2}$: 1,(11,3); dunque il lato del quadrato iscritto sta al raggio come la radice quadrata di 2 sta all' unità.

PROPOSIZIONE IV. — *TEOREMA.*

Il lato dell' esagono regolare iscritto è uguale al raggio, e il lato del triangolo equilatero iscritto sta al raggio come la radice quadrata di 3 sta all' unità.

1° Supponiamo infatti che AB (fig. 158) sia un lato di questo esagono iscritto; se si conducano i raggi AO, OB, dico che il triangolo AOB sarà equilatero.

Infatti, l' angolo AOB è la sesta parte di quattro angoli retti; sicchè, prendendo per unità l' angolo retto, si avrà AOB$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; i due altri angoli ABO, BAO dello stesso triangolo valgono insieme $2-\frac{2}{3}$, o $\frac{4}{3}$, e siccome sono uguali, ciascuno di essi$=\frac{2}{3}$; dunque il triangolo ABO è equilatero; dunque il lato dell' esagono iscritto è uguale al raggio.

Segue da ciò che per iscrivere un esagono regolare in una data circonferenza, bisogna portare sei volte il raggio sulla circonferenza; si ritornerà così allo stesso punto dal quale s' era partito.

2.° Iscritto l' esagono ABCDEF, se si congiungano alternativamente i vertici degli angoli, si formerà il triangolo equilatero ACE.

Ora la figura ABCO è un parallelogrammo ed anche una losanga, poichè AB=BC=CO=AO; dunque (15, 3) la somma dei quadrati delle diagonali $\overline{AC}^2+\overline{BO}^2$ è uguale alla somma dei quadrati dei lati che è $4\ \overline{AB}^2$ o $4\ \overline{BO}^2$; togliendo da una parte e dall' altra $\overline{BO}^2$, resterà $\overline{AC}^2=3\ \overline{BO}^2$; dunque $\overline{AC}^2 : \overline{BO}^2$::3 : 1, o AC : BO:: $\sqrt{3}$: 1; dunque il lato del triangolo equilatero iscritto sta al raggio come la radice quadrata di 3 sta all' unità.

Scolio I. Se per due punti A e C si volesse far passare una circonferenza in modo che l' arco ABC ne fosse la terza parte, si de-

scriverebbe sopra AC il triangolo equilatero, e la circonferenza cercata sarebbe quella che passa pei tre punti A, E, C.

II. Se per due punti A o B si volesse far passare una circonferenza in modo che l'arco AB ne fosse la sesta parte, si descriverebbe sopra AB il triangolo equilatero, e la circonferenza cercata sarebbe quella che ha per centro O e per raggio AOB.

III. Sapendosi trovare l'arco AB sesta parte della circonferenza, dividendo questo per metà si avrà la dodicesima parte della circonferenza, ovvero la terza parte del quadrante. Il quadrante è il solo arco che si sappia trisecare colla geometria elementare, e quindi anche l'angolo retto è il solo angolo, perchè si è accennato già altrove che ogni altro arco, o angolo non si può dividere in tre parti uguali colla riga e col compasso.

IV. Si è veduto già che le perpendicolari elevate sui lati di un triangolo dai loro punti medi s'incontrano nello stesso punto, e che il medesimo avviene delle rette che dividono per metà i tre angoli; ora si deduce da questa proposizione che nel triangolo equilatero queste sei rette s'incontrano tutte nel medesimo punto, cioè nel centro del triangolo.

Congiungendo questo centro coi tre vertici, il triangolo vien diviso in tre triangoli isosceli uguali; e se dopo ciò si abbassino dal centro le perpendicolari sui lati, verrà diviso in sei triangoli rettangoli uguali.

PROPOSIZIONE V. — *TEOREMA.*

Il lato del decagono regolare iscritto è la parte maggiore del raggio diviso in estrema e media ragione.

Sia diviso il raggio AO (fig. 159) in estrema e media ragione al punto M (probl. 4, lib. 3); dico che la parte maggiore OM sarà il lato del decagono regolare iscritto.

Si prenda la corda AB uguale ad AM, e si congiunga OB, MB. Si ha, per costruzione, AO : OM :: OM : AM, o, per essere AB = OM, AO : AB :: AB : AM; adunque i triangoli ABO, AMB, hanno un angolo di comune A compreso tra lati proporzionali, e però sono simili, (21, 3). Il triangolo AOB è isoscele, dunque tal è pu-

re il triangolo **AMB**, e si ha **AB**=**BM**; d'altra parte **AB**=**OM**; dunque anche **MB**=**OM**, cioè il triangolo **BMO** è isoscele.

L' angolo **AMB** esterno al triangolo isoscele **BMO** è doppio dell' interno ed opposto **O** (24, 1); ora l'angolo **AMB**=**MAB**; dunque il triangolo **OAB** è tale che ciascuno degli angoli alla base, **OAB**, **OBA**, è doppio dell' angolo al vertice **O**; così dunque l'angolo **O** è la quinta parte di due angoli retti, ovvero la decima parte di quattro angoli retti; dunque l' arco **AB** è la decima parte della circonferenza, o la corda **AB** è il lato del decagono regolare.

Corollario I. Se si congiungano a due e due i vertici del decagono regolare, si formerà il pentagono regolare **ACEGI**; onde per iscrivere questo secondo fa d' uopo iscrivere innanzi il primo.

II. Essendo sempre **AB** il lato del decagono, sia **AL** quello dell'esagono; allora l' arco **BL** sarà, per rapporto alla circonferenza $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$, ovvero $\frac{1}{15}$; dunque la corda **BL** è il lato del pentedecagono regolare, ovvero poligono di 15 lati. Si vede nello stesso tempo che l'arco **CL** è la terza parte di **CB**.

Scolio I. Quando si voglia far passare una circonferenza per due punti **A** e **B** in modo che l'arco **AB** sia la decima parte della circonferenza, si dovrà descrivere il triangolo **ABO** tale che ciascuno degli angoli alla base **OAB**, **ABO** sia doppio dell' angolo al vertice **O**. Il che si farà dividendo una retta qualunque in estrema e media ragione, poi formando un triangolo isoscele che abbia questa retta pei due lati uguali e per la base la parte maggiore, e in ultimo costruendo su di **AB** omologo alla base il triangolo simile **AOB**; e così **O** sarà il centro ed **OA** il raggio della circonferenza richiesta. La stessa costruzione serve a trovare l'angolo **O** quinta parte di 2 retti, ovvero $\frac{2}{5}$ di 1 retto, e dividendo questo per metà si avrà la quinta parte di 1 retto, e così si sa dividere l' angolo retto in 5 parti uguali.

II. Per far passare una circonferenza pei punti **A** e **C** in modo che l'arco **ABC** sia $\frac{1}{5}$ della circonferenza, si osserverà che l'angolo **IAC** è $\frac{6}{5}$ di un retto; dunque si troverà, come prima, l' angolo **O**$=\frac{2}{5}$ di 1 retto, al punto **A** si farà l'angolo **IAC** triplo dell' angolo **O**, si prenderà **AI**=**AC**, e la circonferenza richiesta sarà quella che passa pei tre punti **I**, **A**, **C**.

O anche si opererà in questo modo. Sapendosi trovare l' angolo

AOB, si potrà avere il suo doppio $AOC = \frac{4}{5}$ di 1 retto; onde per far passare pei punti A e C una circonferenza in modo che l'arco AC ne sia la quinta parte, si dovrà costruire il triangolo isoscele AOC di cui è data la base AC e l'angolo al vertice; indi si farà centro O ed intervallo OA.

Dall' angolo al centro dell' esagono tolto quello del decagono, si ha l'angolo al centro del pentedecagono, e così si farà passare, come prima, per due punti una circonferenza tale che l'arco ne sia la quindicesima parte.

III. Iscritto che siasi un poligono regolare, se si divida ciascuno degli archi sottesi per metà, e si tirino le corde di queste metà, queste formeranno un nuovo poligono regolare di un numero doppio di lati[1]; per tal modo si vede successivamente che il quadrato può servire a iscrivere i poligoni di 8, 16, 32 ec. lati. Del pari l'esagono servirà ad iscrivere i poligoni regolari di 12, 24, 48 ec. lati; il decagono di 20, 40, 80 lati; il pentedecagono quelli di 30, 60, 120 ec. lati.[2]

[1] Non vogliamo tralasciare di far vedere come dato il lato AC (fig. 158) di un poligono regolare iscritto, si può esprimere per mezzo di esso e del raggio il valore del lato AB del poligono iscritto di un numero doppio di lati.

Si ha, per la prop. XI del lib. III

$$AB = \sqrt{BE \times BM} = \sqrt{2AO \times BM};$$

ora $BM = BO - MO = AO - MO$, ed, a cagione del triangolo rettangolo AMO, si ha $MO = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AM}^2} = \sqrt{\overline{AO}^2 - (\frac{1}{2} AC)^2}$; dunque

$$AB = \sqrt{2AO\left[AO - \sqrt{\overline{AO}^2 - (\tfrac{1}{2} AC)^2}\right]}$$

Se si prenda per unità il raggio, ciò si faccia $AO = 1$, questa espressione diverrà

$$AB = \sqrt{2\left[1 - \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2} AC)^2}\right]} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \overline{AC}^2}}.$$

[2] Si è creduto lungamente che questi poligoni fossero i soli che potessero essere iscritti coi procedimenti della geometria elementare o, che vale lo stesso, colla risoluzione delle equazioni di primo e secondo grado; ma il Gauss ha provato in un'opera cui è titolo *Disquisitiones Arithmeticæ*. *Lipsiæ*, 1810, che si può

PROPOSIZIONE VI. — *PROBLEMA.*

Dato un poligono regolare iscritto, circoscrivere alla stessa circonferenza un poligono simile.

Sia ABCD, ec. (fig. 160) il poligono iscritto; al punto T medio dell'arco AB, si tiri la tangente GH, la quale sarà parallela ad AB, perchè entrambe perpendicolari al raggio OT (9, 2); si faccia lo stesso ai punti medi di ciascuno degli altri archi BC, CD, ec.; queste tangenti formeranno colle loro intersezioni il poligono regolare circoscritto GHIK, ec. simile al poligono iscritto.

Da prima è facile di vedere che i tre punti O, B, H sono in linea retta, perocchè i triangoli OTH, OHN, hanno l'ipotenusa comune OH e il cateto OT = ON; dunque sono uguali; e però l'angolo TOH=HON; d'onde vedesi che la retta OH passa nel punto B medio dell'arco TN; per la stessa ragione il punto I sta sul prolungamento di OC, ec. Ma, poichè GH è parallela ad AB ed HI a BC, l'angolo GHI=ABC (28, 1); parimente HIK=BCD, ec.; dunque gli angoli del poligono circoscritto sono uguali a quelli del poligono iscritto. Inoltre, a cagione di queste medesime parallele, si ha GH : AB :: OH : OB e HI : BC :: OH : OB; dunque GH : AB :: HI : BC. Ma AB=BC; dunque GH=HI. Per la stessa ragione HI=IK, ec.; dunque i lati del poligono circoscritto sono uguali fra loro; dunque questo poligono è regolare e simile al poligono iscritto.

Corollario I. Reciprocamente, se si desse il poligono circoscritto GHIK, ec. e bisognasse tracciare per mezzo di esso il poligono iscrit-

iscrivere con tali procedimenti il poligono di 17 lati e generalmente quelli di 2^n+1 lati, purchè 2^n+1 sia un numero primo.

Per la dimostrazione di ciò si può consultare anche lo stesso Legendre, *Théorie des nombres* n.° 441.

Indirizzeremo anche il lettore alla *Geometria del compasso* del Mascheroni per il modo onde si divide approssimativamente la circonferenza in un numero qualunque di parti uguali.

to ABC ec, vedesi che basterebbe condurre ai vertici G, H, I, ec. del poligono dato, le rette OG, OH, ec. le quali incontrerebbero la circonferenza nei punti A, B, C, ec.; si congiungerebbero poi questi punti con le corde AB, BC, ec., le quali formerebbero il poligono iscritto. Potrebbonsi anche semplicemente congiungere i punti di contratto T, N, P, ec. con le corde TN, NP, ec., e si formerebbe così un poligono regolare iscritto simile al circoscritto.

II. Si possono dunque circoscrivere a un cerchio tutti i poligoni regolari che vi si sanno iscrivere, e viceversa [1].

PROPOSIZIONE VII. — *TEOREMA.*

L'aia di un poligono regolare è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio iscritto.

Sia, per esempio, il poligono regolare GHIK, ec. (fig. 160); il triangolo GOH ha per misura $GH \times \frac{1}{2}OT$, il triangolo OHI ha per misura $HI \times \frac{1}{2}ON$; ma $ON = OT$; dunque questi due triangoli riuniti insieme hanno per misura $(GH + HI) \times \frac{1}{2}OT$. Continuando in questo modo per gli altri triangoli, si vedrà che la somma di tutti i triangoli, cioè l'intero poligono, ha per misura la somma delle basi GH, HI, IK, ec., ovvero il perimetro del poligono moltiplicato per $\frac{1}{2}$ OT, cioè per la metà del raggio del cerchio iscritto.

Corollario. Lo stesso avviene di ogni poligono circoscritto al cerchio. Si ricava da ciò che le aie dei poligoni circoscritti a un medesimo cerchio stanno fra loro come i rispettivi perimetri.

Scolio. Il raggio del cerchio iscritto OT non è altro se non la perpendicolare abbassata dal cento sopra uno dei lati; è detta qualche volta l'*apotema* del poligono.

[1] Quando si conosca il lato AM (fig. 169) di un poligono regolare iscritto e il raggio CM del cerchio, sarà facile esprimere per mezzo di essi il lato del poligono simile circoscritto.

I due triangoli nCM, PCM sono simili, perchè l'uno è rettangolo in n, l'altro in M, e di più hanno l'angolo PCM di comune; dunque i lati omologhi dànno la proporzione

$$Cn : CM :: nM : PM, \text{ o } Cn : CM :: \tfrac{1}{2} AM : \tfrac{1}{2} PQ,$$

PROPOSIZIONE VIII. — *TEOREMA.*

I perimetri dei poligoni regolari di un medesimo numero di lati stanno fra loro come i raggi dei cerchi circoscritti, ed anche come i raggi dei cerchi iscritti; le loro aie come i quadrati di questi stessi raggi.

Sia AB (fig. 161) un lato di uno dei due poligoni di cui si tratta, O il suo centro, e quindi OA il raggio del cerchio circoscritto, ed OD, perpendicolare su di AB, il raggio del cerchio iscritto; sia parimente *ab* il lato di un altro poligono simile, *o* il suo centro, *oa* ed *od* i raggi dei cerchi circoscritto e iscritto. I perimetri dei due poligoni stanno fra loro come i lati AB, *ab*; ma gli angoli A ed *a* sono uguali, essendo ciascuno metà dell'angolo del poligono; il simile si dica degli angoli B e *b*; dunque i triangoli ABO, *abo* sono simili, al pari dei triangoli ADO, *ado*; dunque AB : *ab* :: AO : *ao* :: DO : *do*; onde i perimetri dei poligoni stanno fra loro come i raggi AO, *ao* dei cerchi circoscritti, ed anche come i raggi DO, *do* dei cerchi iscritti.

Le aie di questi medesimi poligoni stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi AB, *ab*; esse stanno anche per conseguenza come i quadrati dei raggi AO, *ao* dei cerchi circoscritti, o come i quadrati dei raggi OD, *od* dei cerchi iscritti.

Scolio. È buono osservare che moltiplicandosi il numero dei lati in un poligono regolare iscritto, il suo perimetro divien maggiore, e che il contrario avviene dei poligoni circoscritti. Infatti sia AC (fig. 158) il lato di un poligono regolare iscritto; AB sarà quello del poligono iscritto di un numero doppio di lati. Ora nel trian-

d'onde si ricava $PQ = \frac{AM \times CM}{Cn}$, ovvero osservando che $Cn = \sqrt{\overline{CM}^2 - \overline{nM}^2}$ $= \sqrt{\overline{CM}^2 - (\frac{1}{2}AM)^2}$, si ha $PQ = \frac{AM \times CM}{\sqrt{CM^2 - (\frac{1}{2}AM)^2}}$

e quando il raggio $CM = 1$, $PQ = \frac{AM}{\sqrt{1 - (\frac{1}{2}AM)^2}}$.

golo ABC si ha $AB + BC > AC$; lo stesso avviene in tutti gli altri archi, dunque il secondo perimetro è maggiore del primo.

Sia in secondo luogo IH (fig. 160) il lato del poligono circoscritto; sarà pq quello del poligono di un numero doppio di lati. Ora $qp < qI + Ip$; dunque $Pq + qp + pN < PI + IN$; lo stesso si dimostrerà negli altri archi NT, TS, ec.; dunque il secondo perimetro è minore del primo.

Si vede da ciò che col moltiplicare dei lati, la differenza fra i due perimetri dei poligoni simili iscritto e circoscritto si fa sempre minore, e dico che può essere minore di qualunque quantità per piccola che possa assegnarsi. Infatti chiamando P il perimetro del poligono circoscritto e p quello del poligono simile iscritto (fig. 160), si avrà la proporzione $P : p :: OT : On$, e *dividendo*, $P-p : P :: OT-On : OT$, ovvero $P-p : P :: Tn : OT$; di qui risulta $P-p = \frac{Tn \times P}{OT}$. Ora nulla vieta d'immaginar presa Tn di tal picciolezza quale si voglia; sicchè la differenza $P-p$ può essere minore di qualunque quantità assegnabile.

PROPOSIZIONE IX. — *LEMMA*.

Ogni linea curva o spezzata che inviluppa da una estremità all'altra una linea convessa, è più lunga di questa linea inviluppata.

Abbiamo detto già che per linea convessa intendiamo quella linea curva o spezzata, o parte curva, parte spezzata, che non può essere incontrata da una linea retta in più di due punti. Sia AMB (fig. 162) una linea convessa; ella non dovrà presentare alcune parti rientranti o sinuosità, perchè è facile vedere che così una retta potrebbe tagliarla in più di due punti. Gli archi di cerchio sono essenzialmente convessi; ma la proposizione di cui ora è parola si estende ad una linea qualunque che adempia alla condizione richiesta.

Posto ciò, se la linea AMB non è più corta di tutte quelle che l'inviluppano, vi sarà fra di queste ultime una linea più corta di

tutte le altre, la quale sarà più corta di **AMB**, o al più uguale ad **AMB**. Sia **ACDEB** questa linea inviluppante; tra le due linee si conduca dovunque si voglia la retta **PQ**, la quale non interseghi la linea **AMB**, ma al più la tocchi; la retta **PQ** è più corta di **PCDEQ**; dunque se alla parte **PCDEQ** si sostituisca la retta **PQ**, si avrà la linea inviluppante **APQB** più corta di **APDQB**. Ma, per ipotesi, quest' ultima dee essere la più corta di tutte; dunque questa ipotesi non può stare; adunque tutte le linee inviluppanti sono più lunghe di **AMB**.

Scolio. Si dimostrerà assolutamente nello stesso modo che una linea convessa e rientrante sopra sè medesima **AMB**, (fig. 163) è più corta di ogni linea che l'inviluppasse da ogni parte, sia che la linea inviluppante **FHG** tocchi **AMB** in uno o più punti, sia che la circondi senza toccarla.

PROPOSIZIONE X. — *LEMMA*.

Essendo date due circonferenze concentriche, si può sempre iscrivere nella maggiore un poligono regolare i cui lati non tocchino la minore, ed anche circoscrivere alla minore un poligono regolare i cui lati non incontrino la maggiore; di maniera che nell' un caso e nell'altro i lati del poligono descritto saranno rinchiusi fra le due circonferenze.

Siano **CA**, **CB** (fig. 164) i raggi delle due circonferenze date. Al punto **A** si meni la tangente **DE** che termini alla circonferenza maggiore in **D** ed **E**; s' iscriva nella circonferenza maggiore, uno dei poligoni regolari che si sanno iscrivere per le proposizioni precedenti, e divisi poi gli archi sottesi dai lati in due parti uguali, si conducano le corde dei semiarchi; si avrà così un poligono regolare d' un numero doppio di lati.

Si continui la bisezione degli archi fino a che si pervenga ad un arco minore di **DBE**. Sia **MBN** questo arco (di cui supporremo in **B** il punto di mezzo); è chiaro che la corda **MN** sarà più lontana dal centro che **DE**, e che il poligono regolare di cui **MN** è il lato non potrebbe incontrare la circonferenza di cui **CA** è il raggio.

Stando le medesime cose, si congiungano CM e CN che incontrino la tangente DE in P e Q; PQ sarà il lato del poligono circoscritto alla circonferenza minoro, simile al poligono iscritto nella maggioro, di cui MN è il lato. Ora è chiaro che il poligono circoscritto che ha per lato PQ, non potrebbe incontrare la circonferenza maggiore, poichè CP è minore di CM.

Dunque colla medesima costruzione, si può descrivere un poligono regolare iscritto nella circonferenza maggiore e un poligono simile circoscritto alla minore, i quali avranno i loro lati compresi fra le due circonferenze.

Scolio. Se abbiansi due settori concentrici FCG, ICH, si potrà medesimamente iscrivere nel maggiore *una porzione di poligono regolare*, e circoscrivero al minore una porzione di poligono simile, in maniera che i contorni dei due poligoni siano compresi fra le due circonferenze; basterà dividere l'arco FBG successivamente in 2, 4, 8, 16, ec. parti uguali, fino a che si giunga ad una parte minore di DBE.

Noi qui chiamiamo *porzione di poligono regolare* la figura terminata da una serie di corde uguali iscritte nell'arco FG d'una estremità all'altra. Questa porzione ha le proprietà principali dei poligoni regolari, come gli angoli uguali o i lati uguali; è iscrittibile e circoscrittibile al cerchio; intanto ella non farà parte di un poligono regolare propriamente detto, se non quando l'arco sotteso da uno del suoi lati sia una parte aliquota della circonferenza.

PROPOSIZIONE XI. — *TEOREMA.*

Le circonferenze dei cerchi stanno fra loro come i raggi, e le loro superficie come i quadrati dei raggi.

Dinotiamo per brevità con *circ.* CA (fig. 165) la circonferenza che ha per raggio CA; dico che si avrà CA : OB :: *circ.* CA : *circ.* OB.

Perocchè, se questa proporzione non ha luogo, sarà il quarto termine maggiore o minore di *circ.* OB; sia se è possibile *circ.* OD minore di *circ.* OB, in modo che si abbia CA : OB :: *circ.* CA : *circ.* OD.

S'iscriva nella circonferenza che ha per raggio OB un poligono regolare e i cui lati non incontrino la circonferenza di cui OD è il raggio (10); s'iscriva un poligono regolare simile MNPST nella circonferenza di cui CA è il raggio.

Posto ciò, poichè questi poligoni sono simili, i perimetri MNPST, EFGKL stanno fra loro come i raggi CA, OB dei cerchi circoscritti (8), si avrà MNPST : EFGKL :: CA : OB ; ma, per ipotesi, CA : OB :: *circ.* CA : *circ.* OD ; dunque MNPST : EFGKL :: *circ.* CA : *circ.* OD. Ora, questa proporzione è impossibile perocchè il perimetro MNPST è minore di *circ.* CA (9), mentre per contrario EFGKL è maggiore di *circ.* OD. Dunque non può stare CA ad OB come *circ.* CA ad una circonferenza minore di *circ.* OB, o in termini più generali, è impossibile che un raggio stia ad un altro raggio come la circonferenza descritta col primo raggio a una circonferenza minore di quella descritta col secondo raggio.

Si conchiude da ciò che non si può avere CA ad OB come *circ.* CA a una circonferenza maggiore di *circ.* OB, perocchè, se ciò fosse, si avrebbe, rovesciando i rapporti, OB a CA come una circonferenza maggiore di *circ.* OB a *circ.* CA, o che torna lo stesso, come *circ.* OB ad una *circ.* minore di *circ.* CA ; dunque un raggio starebbe a un raggio come la circonferenza descritta col primo a una circonferenza minore di quella descritta col secondo, il che si è già dimostrato impossibile.

Poichè il quarto termine della proporzione CA : OB :: *circ.* CA : X non può essere nè minore nè maggiore di *circ.* OB, bisogna che sia uguale a *circ.* OB; dunque le circonferenze dei cerchi stanno fra loro come i raggi.

Un ragionamento ed una costruzione intieramente simili serviranno a dimostrare che le superficie dei cerchi stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi. [1]

Non entreremo a parlare più particolarmente di questa proposizione, la quale è pure un corollario di quella che seguirà.

[1] Il Legendre ha ben fatto di servirsi di questa dimostrazione, dovuta al Maurolico, perch'essa è conforme più di tutte le altre allo spirito del metodo geometrico, e mette dinanzi agli occhi la cosa. Chi brami vederne una dimostrazione non per via d'assurdo legga il *Lacroix Éléments de Géometrie* n.° 154.

Corollario. Gli archi simili AB, DE (fig. 166) stanno fra loro come i raggi AC, DO e i settori simili ACB, DOE stanno come i quadrati di questi medesimi raggi.

Imperocchè essendo simili gli archi, l'angolo C è uguale all'angolo O (def. 3, lib. 3); ora l'angolo C sta a quattro angoli retti come l'arco AB all'intiera circonferenza descritta col raggio AC (15, 2), e l'angolo O sta a quattro angoli retti come l'arco DE sta alla circonferenza descritta col raggio OD; dunque gli archi AB, DE stanno fra loro come le circonferenze di cui fanno parte; queste circonferenze stanno fra loro come i raggi AC, DO; dunque *arc* AB : *arc.* DE :: $AC^2 : DO^2$.

Per la medesima ragione i settori ACB, DOE stanno come gl'interi cerchi; questi stanno come i quadrati dei raggi; dunque *sett.* ACB : *sett.* DOE :: $\overline{AC}^2 : \overline{DO}^2$.

PROPOSIZIONE XII. — *TEOREMA.*

L'aia del cerchio è uguale al prodotto della sua circonferenza per la metà del raggio.[1]

Dinotiamo con *superf.* CA (fig. 167) la superficie del cerchio che ha per raggio CA; dico che si avrà *superf.* CA $= \frac{1}{2}$CA $\times$ *circ.* CA.

[1] Si noti che le proprietà del cerchio non differiscono in nulla da quelle dei poligoni regolari; ed in sostanza un cerchio non *è che un poligono regolare d'infiniti lati.* Infatti la circonferenza del cerchio è il *limite* dei poligoni regolari iscritti e circoscritti, perchè crescendo sempre il numero dei lati, i due perimetri, come si è veduto di sopra, si avvicineranno sempre all'uguaglianza, ma sempre l'uno invilupperà la circonferenza, l'altro ne sarà inviluppato; sicchè si può dire che questi due perimetri si confonderanno e formeranno la circonferenza del cerchio quando avranno infiniti lati. Ma, come dice il Lagrange, *l'espèce de métaphysique que l'on est obligé d'y employer, est sinon contraire, du moins étrangère à l'esprit de l'analyse* (e quindi anche della geometria) *qui ne doit avoir d'autre métaphysique que celle qui consiste dans les premiers principes et dans les premières opérations fondamentales du calcul.* Ora s'egli col suo potente e sublime intelletto ha voluto stabilire nel suo *Calcul des Fonctions* i principii del calcolo differenziale senza metodo d'infinitamente piccoli o di limiti ma coi soli metodi dell'algebra ordinaria, quanto maggiormente non decsi bandire una

Perocchè se $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *circ.* CA non è uguale alla superficie del cerchio che ha per raggio CA, s'immagina bene che vi sarà un altro cerchio la cui superficie avrà questa misura. Supponiamo da prima che $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *circ.* CA sia la misura di un cerchio maggiore, e sia se è possibile $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *circ.* CA $=$ *superf.* CB.

Al cerchio di cui CA è il raggio si circoscriva un poligono regolare DEFG ec., i cui lati non incontrino la circonferenza che ha per raggio CB (10); la superficie di questo poligono sarà uguale al suo contorno DE $+$ EF $+$ FG $+$ ec. moltiplicato per $\frac{1}{2}$ AC (7); ma il contorno del poligono è maggiore della circonferenza iscritta, perocch' esso la inviluppa da ogni parte; dunque la superficie del poligono DEFG ec. è maggiore di $\frac{1}{2}$ AC $\times$ *circ.* AC che, per ipotesi, è la misura del cerchio di cui CB è il raggio; dunque il poligono sarebbe maggiore del cerchio. Ora, per contrario n'è minore, perchè vi è contenuto; dunque è impossibile che $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *circ.* CA sia maggiore di *superf.* CA, o, in altri termini, è impossibile che la circonferenza di un cerchio moltiplicata per la metà del suo raggio, sia la misura di un cerchio maggiore.

Dico in secondo luogo che lo stesso prodotto non può essere la misura di un cerchio minore; e per non mutar figura, supporrò che si tratti del cerchio di cui CB è il raggio; fa d'uopo adunque dimostrare che $\frac{1}{2}$ CB $\times$ *circ.* CB non può essere la misura di un cerchio minore; per esempio, del cerchio, che ha per raggio CA. In fatti, sia, s'è possibile, $\frac{1}{2}$ CB $\times$ *circ.* CB $=$ *superf.* CA.

Fatta la medesima costruzione di sopra, la superficie del poligono DEFG ec. avrà per misura (DE$+$EF$+$FG$+$ec.) $\times$ $\frac{1}{2}$ CA; ma il contorno DE$+$EF$+$FG$+$ec. è minore di *circ.* CB che l'inviluppa da ogni parte; dunque l'aia del poligono è minore di $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *circ.* CB, e a più forte ragione minore di $\frac{1}{2}$ CB $\times$ *circ.* CB. Quest' ultima quantità è, per ipotesi, la misura del cerchio iscritto; dunque sarebbe il poligono minore del cerchio iscritto il che è assurdo; è dunque impossibile che la circonferenza di un cerchio, moltiplicata per la metà del suo raggio, sia la misura di un cerchio minore.

tale metafisica dagli elementi. Per questa ragione, in cambio di trarre le proprietà del cerchio come tanti corollarii da quelle dei poligoni regolari, si è dovuta prendere la via delle dimostrazioni per assurdo.

Dunque finalmente la circonferenza di un cerchio, moltiplicata per la metà del suo raggio, è la misura di questo medesimo cerchio.

Corollario I. La superficie di un settore è uguale all'arco di questo settore moltiplicato per la metà del raggio.

Perchè il settore ACB sta all'intiero cerchio come l'arco AMB sta all'intera circonferenza ABD (15, 2), o come AMB $\times \frac{1}{2}$ AC sta ad ABD $\times \frac{1}{2}$ AC. Ma il cerchio intiero $=$ ABD $\times \frac{1}{2}$ AC; dunque il settore ACB ha per misura AMB $\times \frac{1}{2}$ AC.

II. Chiamiamo π la circonferenza il cui diametro è l'unità: poichè le circonferenze stanno fra loro come i raggi o come i diametri, si potrà fare questa proporzione: il diametro 1 sta alla sua circonferenza π come il diametro 2CA sta alla circonferenza che ha per raggio CA; in modo che si avrà $1 : \pi :: 2CA : circ.\ CA$; dunque $circ.\ CA = 2\pi CA$. Moltiplicando da una parte e dall'altra per $\frac{1}{2}$ CA, si avrà $\frac{1}{2}\, CA \times circ.\ CA = \pi \times \overline{CA}^2$, o $superf.\ CA = \pi\overline{CA}^2$; dunque *la superficie di un cerchio è uguale al prodotto del quadrato del suo raggio pel numero costante* π, *che rappresenta la circonferenza che ha per diametro 1, o il rapporto della circonferenza al diametro*.

Parimente la superficie del cerchio che ha per raggio OB sarà uguale a $\pi \times \overline{OB}^2$; ora $\pi \times \overline{CA}^2 : \pi \times \overline{OB}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{OB}^2$; dunque *le superficie dei cerchi stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi*, il che si accorda col teorema precedente.

Scolio. Abbiamo già detto che il problema della quadratura del cerchio consiste a trovare un quadrato uguale in superficie a un cerchio di cui si conosca il raggio; ora si è qui provato che il cerchio è equivalente al rettangolo fatto sulla circonferenza e la metà del raggio, e questo rettangolo si cangia in quadrato prendendo la media proporzionale tra le sue due dimensioni (prob. 3, lib. 3); adunque il problema della quadratura del cerchio riducesi a trovare la circonferenza quando si conosce il raggio, e per questo è sufficiente di conoscere il rapporto della circonferenza al raggio ovvero al diametro.

La circonferenza e il diametro sono due linee incommensurabili fra loro, intendendo rettificata la circonferenza [1], sicchè mai

[1] Si vegga la nota IV.

non si potrà esprimere esattamente in numeri il loro rapporto; ma l'approssimazione è stata spinta così oltre, che la conoscenza del rapporto esatto non avrebbe niun vantaggio reale su quella del rapporto approssimato. Sicchè questa questione, che ha molto occupato i geometri quando i metodi di approssimazione erano men noti, è ora rimessa fra le questioni oziose delle quali non è lecito darsi briga ad altri che a coloro i quali hanno appena le prime nozioni di geometria.

Archimede ha provato che il rapporto della circonferenza al diametro è compreso fra $3\frac{10}{70}$ e $3\frac{10}{71}$; così $3\frac{1}{7}$ o $\frac{22}{7}$ è già un valore molto approssimato del numero che abbiam rappresentato con π, e questa prima approssimazione è molto in uso a cagione della sua semplicità. *Mezio* ha trovato pel medesimo numero il valore molto più approssimato $\frac{355}{113}$. Finalmente il valore di π svolto fino a un certo ordine di cifre decimali, è stato trovato da altri calcolatori 3,1415926535897932 ec., e si è durato la pena di prolungare queste cifre decimali fino alla ventesimasettima, o anche fino alla centoquarantesima. Egli è evidente che una tale approssimazione equivale alla verità, e che meglio non si conoscono le radici delle potenze imperfette.

Si spiegheranno nei problemi che seguono due dei più semplici metodi elementari per ottenere queste approssimazioni.

PROPOSIZIONE XIII. — *PROBLEMA.*

Data la superficie di un poligono regolare iscritto e quella di un poligono simile circoscritto, trovare le superficie dei poligoni regolari iscritto e circoscritto di un numero doppio di lati.

Sia AB (fig. 169) il lato del poligono iscritto, EF parallela ad AB, quello del poligono simile circoscritto, C il centro del cerchio; se tirasi la corda AM e le tangenti AP, BQ, la corda AM sarà il lato del poligono iscritto di un numero doppio di lati e PQ doppio di PM sarà quello del poligono simile circoscritto (6). Posto ciò, siccome la medesima costruzione avrà luogo nei differenti angoli uguali ad ACM, così basta considerare il solo angolo ACM, e

i triangoli che vi sono contenuti staranno fra loro come gl' interi poligoni. Sia A la superficie del poligono iscritto di cui AB è un lato, B la superficie del poligono simile circoscritto; A′ la superficie del poligono di cui AM è un lato, B′ la superficie del poligono simile circoscritto; A e B sono conosciuti, trattasi di trovare per mezzo di essi A′ e B′.

1.° I triangoli ACD, ACM il cui vertice comune è A, staranno fra loro come le basi CD, CM; d' altra parte questi triangoli stanno come i poligoni A e A′ di cui fanno parte; dunque A : A′ :: CD : CM. I triangoli CAM, CME, il cui vertice comune è M, stanno fra loro come le loro basi CA, CE; questi medesimi triangoli stanno come i poligoni A′ e B di cui fanno parte; dunque A′ : B :: CA : CE. Ma a cagione delle parallele AD, ME, si ha CD : CM :: CA : CE; dunque A : A′ :: A′ : B; dunque A′, l' una delle superficie cercate, è media proporzionale fra le due note A e B, e quindi si ha $A' = \sqrt{A \times B}$.

2.° A cagione dell' altezza comune CM, il triangolo CPM sta al triangolo CPE, come PM : PE; ma la retta CP divide in due parti uguali l' angolo MCE, onde si ha (18, 3) PM : PE :: CM : CE :: CD : CA :: A : A′; dunque CPM : CPE :: A : A′, e *componendo* CPM : CPM + CPE, o CME :: A : A + A′. Ma CMPA o 2CMP e CME stanno fra loro come i poligoni B′ e B di cui fanno parte; dunque B′ : B :: 2A : A + A′. Si è già trovato A′; questa nuova proporzione determinerà B′, e si avrà $B' = \frac{2A \times B}{A + A'}$; dunque, per mezzo dei poligoni A e B, è facile di trovare i poligoni A′ e B′ di un numero doppio di lati.

PROPOSIZIONE XIV. — *PROBLEMA.*

Trovare il rapporto approssimato della circonferenza al diametro. [1]

Sia il raggio del cerchio = 1, il lato del quadrato iscritto sarà $\sqrt{2}$, (3), quello del quadrato circoscritto sarà uguale al diametro

[1] Nelle note a carte 156 e a carte 158 abbiam fatto vedere come dato il lato di

2; dunque la superficie del quadrato iscritto$=2$, e quella del quadrato circoscritto $=4$. Ora se si fa $A=2$, e $B=4$, si troverà pel problema precedente l'ottagono iscritto $A'=\sqrt{8}=2,8284271$, e l'ottagono circoscritto $B'=\frac{16}{2+\sqrt{8}}=3,3137085$. Conoscendo così gli ottagoni, iscritto e circoscritto, si troverà similmente per mezzo loro i poligoni di un numero doppio di lati; bisognerà supporre di nuovo $A=2,8284271$, $B=3,3137985$, e si avrà $A'=\sqrt{A\times B}=3,0614674$ e $B'=\frac{2A\times B}{A+A'}=3,1825979$. Indi questi poligoni di 16 lati serviranno a conoscere quelli di 32, e si continuerà così fino a che il calcolo non dia più differenza tra i poligoni iscritto e circoscritto, almeno nell'ordine di cifre decimali alle quali bisogna arrestarsi, ch'è il settimo nel presente esempio. Giunti a questo punto, si conchiuderà che il cerchio è uguale all'ultimo risultamento, perocchè il cerchio deve sempre essere compreso tra il poligono iscritto e il poligono circoscritto; dunque se questi non differiscono fra loro fino a un certo ordine di cifre decimali, il cerchio medesimamente non ne differirà fino allo stesso ordine.

un poligono regolare iscritto, e il raggio del cerchio, si esprimono per mezzo di essi il lato del poligono iscritto di un numero doppio di lati, e il lato del poligono circoscritto simile al dato iscritto. Ora per mezzo di queste due formole, si può trovare il rapporto della circonferenza al diametro con un terzo metodo, oltre i due che qui espone il Legendre.

Prendendo il raggio per unità, il perimetro dell'esagono iscritto è 6 e per mezzo delle due formole citate si troveranno i valori dei lati e però dei perimetri dei poligoni iscritti di 12, 24, 48, ec. lati, e i perimetri dei poligoni circoscritti di 6, 12, 24, 48 ec. lati. A misura che crescerà il numero dei lati, i perimetri dei due poligoni simili iscritto e circoscritto andranno sempre meno differendo; per esempio, i perimetri dei poligoni di 12288 lati non differiscono sino alla settima cifra decimale; dunque il valore 6, 2831853 che si trova fino alla suddetta cifra comune ad entrambi i perimetri, potrà prendersi per valore della circonferenza, ch'è intermedio a quello dei due perimetri. Se tale è il valore della circonferenza quando il raggio è 1, e quindi il diametro 2, quando il diametro sarà 1, la circonferenza sarà la metà di quel numero, cioè 3, 1415926.

Ecco il calcolo di questi poligoni prolungato fino a che più non differiscano fino alla settima cifra decimale.

Numero dei lati.	Poligono iscritto.	Poligono circoscritto.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422336
256	3,1422772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926

Si conchiude da ciò che la superficie del cerchio $= 3,1415926$. Potrebbesi aver dubbio sull' ultima cifra decimale a causa degli errori che vengono dalle parti disprezzate; ma il calcolo è stato fatto con una cifra decimale di più, per essere sicuri del risultamento qui trovato fino all' ultima cifra decimale.

Poichè la superficie del cerchio è uguale alla semicirconferenza moltiplicata pel raggio, essendo 1 il raggio, la semicirconferenza è 3, 1415926; o essendo 1 il diametro la circonferenza è 3,141 5926; dunque il rapporto della circonferenza al diametro dinotato di sopra con $\pi = 3,1415926$.

PROPOSIZIONE XV. — *LEMMA.*

Il triangolo ***CAB*** (fig. 170) *è equivalente al triangolo isoscele* ***DCE*** *che ha il medesimo angolo* ***C*** *e di cui il lato* ***CE*** *uguale a* ***CD*** *è media proporzionale tra* ***CA*** *e* ***CB***. *Di più, se l'angolo* ***CAB*** *è retto la perpendicolare* ***CF*** *abbassata sulla base del triongolo isoscele,*

sarà media proporzionale tra il lato CA e la semisomma dei lati CA e CB.

Imperocchè 1° a cagione dell'angolo comune C, il triangolo ABC sta al triangolo isoscele DCE come $AC \times CB$ a $DC \times CE$, o $\overline{DC}^2$ (25, 3); dunque questi triangoli saranno equivalenti se $\overline{DC}^2 = AC \times CB$, o se DC è media proporzionale fra AC e CB.

2.° La perpendicolare CF taglia per metà l'angolo ACB, onde si ha AG : GB : : AC : CB, donde risulta, *componendo* AG : AG+GB o AB : : AC : AC+CB; ma AG sta ad AB come il triangolo ACG al triangolo ACB o 2CDF; d'altra parte, se l'angolo A è retto, i triangoli rettangoli ACG, CDF saranno simili e daranno ACG : CDF : : $\overline{AC}^2 : \overline{CF}^2$; dunque $\overline{AC}^2 : 2\overline{CF}^2$: : AC : AC+CB. Moltiplicando il secondo rapporto per AC, gli antecedenti diverranno uguali, e si avrà per conseguenza $2\overline{CF}^2 = AC \times (AC+CB)$, o $\overline{CF}^2 = AC \times \left(\frac{AC + CB}{2}\right)$ dunque 2° se l'angolo A è retto, la perpendicolare CF sarà media proporzionale tra il lato AC e la semisomma dei lati AC, CB.

PROPOSIZIONE XVI. — *PROBLEMA.*

Trovare un cerchio che differisca tanto poco quanto si voglia da un dato poligono regolare.

Sia proposto, per esempio, il quadrato BMNP (fig. 171); si abbassi dal centro C la perpendicolare CA sul lato MB, e si congiunga CB.

Il cerchio descritto col raggio CA è iscritto nel quadrato e il cerchio descritto col raggio CB è circoscritto al medesimo quadrato; il primo sarà minore del quadrato, il secondo maggiore; ma trattasi di ravvicinare questi limiti.

Si prenda CD e CE uguali ciascuna alla media proporzionale fra CA e CB, e si congiunga ED; il triangolo isoscele CDE sarà equivalente al triangolo CAB (15); si faccia il medesimo per ciascuno degli otto triangoli che compongono il quadrato; si formerà così un ottagono regolare equivalente al quadrato BMNP. Il cerchio descritto col raggio CF, media proporzionale fra CA e $\frac{CA+CB}{2}$, sarà iscritto nell'ottagono, e il cerchio descritto col raggio CD gli sarà circoscritto. Così il primo sarà minore del quadrato dato, il secondo maggiore.

Se si cangi nello stesso modo il triangolo rettangolo CDF in un triangolo isoscele equivalente, si formerà così un poligono regolare di 16 lati equivalente al quadrato proposto. Il cerchio iscritto in questo poligono sarà minore del quadrato, e il cerchio circoscritto sarà maggiore.

Si può continuare così fino a che il rapporto tra il raggio del cerchio iscrit-

to e quello del cerchio circoscritto differisca tanto poco quanto si voglia dall'uguaglianza. Allora l'uno o l'altro cerchio potrà riguardarsi come equivalente al quadrato proposto.

Scolio. Ecco a che riducesi la ricerca dei raggi successivi. Sia a il raggio del cerchio iscritto in uno dei poligoni trovati, b il raggio del cerchio circoscritto al medesimo poligono; siano a' e b' i raggi simili pel poligono seguente che ha un numero doppio di lati. Secondo ciò che abbiamo dimostrato, b' è media proporzionale tra a e b, a' è media proporzionale tra a e $\frac{a+b}{2}$; in maniera che si avrà

$$b' = \sqrt{a \times b} \text{ e } a' = \sqrt{a \times \frac{a+b}{2}};$$ dunque i raggi a e b di un poligono essendo conosciuti, se ne deducono facilmente i raggi a' e b' del poligono seguente, e si continuerà così fino a che la differenza fra i due raggi sia divenuta insensibile; allora l'uno o l'altro di questi raggi sarà il raggio del cerchio equivalente al quadrato o al poligono proposto.

Questo metodo è facile a praticarsi in linee, poichè esso riducesi a trovare alcune medie proporzionali successive tra date rette; ma riesce ancor meglio in numeri, ed è uno de' più comodi che possa fornire la geometria elementare per trovare prontamente il rapporto fra la circonferenza e il diametro. Sia il lato del quadrato $= 2$, il primo raggio iscritto CA sarà 1, e il primo raggio circoscritto CB sarà $\sqrt{2}$ ovvero 1, 4142136. Facendo dunque $a=1$, $b=1, 4142236$, si troverà $b'=1, 1892071$ e $a'=1, 0986841$. Questi numeri serviranno a calcolare i seguenti secondo la legge di continuazione.

Ecco il risultamento del calcolo fatto fino a sette o otto cifre decimali con le tavole dei logaritmi ordinari.

Raggi dei cerchi circoscritti.	Raggi dei cerchi iscritti.
1, 4142136	1, 0000000
1, 1892071	1, 0986841
1, 1430500	1, 1210863
1, 1320149	1, 1265639
1, 1292862	1, 1279257
1, 1286063	1, 1282657

Ora che la prima metà delle cifre è la medesima dalle due parti, si può, in cambio dei medi geometrici, prendere i medi aritmetici, che non ne differiscono se non nelle ulteriori cifre decimali. In questo modo l'operazione si abbrevia di molto e i risultamenti sono:

1, 1284360	1, 1283508
1, 1283934	1, 1283721
1, 1283827	1, 1283774
1, 1283801	1, 1283787
1, 1283794	1, 1283791
1, 1283792	1, 1283792

Adunque 1, 1283792 è con grande approssimazione il raggio del cerchio uguale in superficie al quadrato il cui lato è Q. Di qui è facile trovare il rapporto della circonferenza al diametro; perocchè si è dimostrato che la superficie del cerchio è uguale al quadrato del suo raggio moltiplicato pel numero π; dunque se si divide la superficie 4 pel quadrato di 1, 1283792, si avrà il valore di π che si trova col calcolo essere uguale a 3, 1415926 ec. come si è trovato già con un altro metodo.

APPENDICE AL LIBRO IV.

Definizioni.

I. Si dice che una quantità è in istato di *massimo* quando è la maggiore di tutte quelle della medesima specie; in istato di *minimo* quando è la minore.

Così il diametro è *massimo* tra tutte le rette che congiungono due punti della circonferenza, e la perpendicolare è *minima* di tutte le rette condotte da un dato punto ad una data linea retta.

II. Si chiamano figure *isoperimetre* quelle che hanno i loro perimetri uguali.

PROPOSIZIONE PRIMA. — *TEOREMA.*

Fra tutti i triangoli di uguale base e di ugual perimetro, il triangolo* massimo *è quello nel quale i due lati non determinati sono fra loro uguali.

Sia AC = CB (fig. 172), e AM+MB = AC+CB; io dico che il triangolo isoscele ACB è maggiore del triangolo AMB che ha la stessa base e lo stesso perimetro.

Dal punto C, come centro, e col raggio CA=CB, si descriva una circonferenza che incontri CA prolungata in D; si congiunga DB; e l'angolo DBA, iscritto nel semicerchio, sarà un angolo retto (16, 2). Si prolunghi la perpendicolare DB verso N, facciasi MN=MB, e congiungasi AN. In ultimo dai punti M e C si abbassino MP e CG perpendicolari sopra DN. Poichè CB=CD ed MN = MB, si ha AC+CB = AD, ed AM+MB=AM+MN. Ma AC+CD=AM+MB; dunque AD=AM+MN; dunque AD>AN; ora, se l'obbliqua AD è maggiore dell'obbliqua AN, ella dee essere più lontana dalla perpendicolare AB; dunque DB>BN, e però BG, ch'è metà di BD (13, 1) sarà maggiore di BP metà di BN. Ma i triangoli ABC, ABM, che hanno la medesima base AB, stanno fra loro come le altezze BG, BP; dunque, poichè si ha BG>BP, il triangolo isoscele ABC è maggiore del non isoscele ABM di uguale base e di ugual perimetro.

PROPOSIZIONE II. — *TEOREMA.*

Fra tutti i poligoni isoperimetri e d'uno stesso numero di lati, quello ch' è* massimo *ha tutti i suoi lati uguali.

Imperocchè sia ABCDEF (fig. 173) il poligono *massimo*; se il lato BC non è

uguale a CD, facciasi sulla base BD un triangolo isoscele BOD che sia isoperimetro a BCD (prop. 1), e per conseguenza il poligono ABODEF sarà maggiore di ABCDEF; dunque quest' ultimo non sarebbe il *massimo* tra tutti quelli che hanno il medesimo perimetro e lo stesso numero di lati il che è contrario alla supposizione. Si dee dunque avere BC=CD; si avrà per la medesima ragione CD=DE, DE=EF, ec.; adunque tutti i lati del poligono *massimo* sono uguali tra loro.

PROPOSIZIONE III. — *TEOREMA.*

Di tutti i triangoli formati con due lati dati i quali facciano un angolo ad arbitrio, il **massimo** ***è quello nel quale i due lati dati fanno un angolo retto.***

Siano i due triangoli BAC, BAD (fig. 174) i quali hanno il lato AB comune e il lato AC=AD; se l'angolo BAC è retto, io dico che il triangolo BAC sarà maggiore del triangolo BAD nel quale l'angolo A è acuto o ottuso.

Perocchè, essendo la stessa la base AB, i due triangoli BAC, BAD stanno fra loro come le altezze AC, DE; ma la perpendicolare DE è più corta dell' obbliqua AD o la sua uguale AC; dunque il triangolo BAD è minore di BAC.

PROPOSIZIONE IV. — *TEOREMA.*

Di tutti i poligoni formati con lati dati e un ultimo ad arbitrio, il **massimo** ***dev' esser tale che tutti i suoi angoli siano iscritti in una semicirconferenza di cui il lato incognito sia il diametro.***

Sia ABCDEF (fig. 175) il maggiore dei poligoni formati coi lati dati AB, BC, CD, DE, EF, e un ultimo AF quale si voglia; si tirino le diagonali AD, DF. Se l'angolo ADF non fosse retto, si potrebbe, conservando le parti ABCD, DEF, tali quali sono, aumentare il triangolo ADE, e per conseguenza l' intiero poligono, rendendo retto l' angolo ADE, conformemente alla proposizione precedente; ma questo poligono non può più essere aumentato, perchè si suppone essere pervenuto al suo *massimo*; dunque l' angolo ADF è già un angolo retto. Lo stesso avviene degli angoli ABF, ACF, AEF; dunque tutti gli angoli A, B, C, D, E, F del poligono *massimo* sono iscritti in una semicirconferenza il cui diametro è il lato indeterminato AF.

Scolio. Questa proposizione dà luogo ad una questione, cioè se ci hanno più maniere di formare un poligono con lati dati, ed un ultimo incognito che sia il lato della semicirconferenza nella quale gli altri sono iscritti. Prima di decidere una tal questione, fa d' uopo osservare che se una medesima corda AB (fig. 176)

sottende degli archi descritti con differenti raggi AC , AD , l'angolo al centro appoggiato su questa corda sarà il minore nel cerchio ove il raggio e il maggiore; così ACB<ADB. In fatti, l'angolo ADO = ACD + CAD (28, 1) dunque ACD<ADO, a raddoppiando da una parte e dall'altra, si avrà ACB<ADB.

PROPOSIZIONE V. — *TEOREMA.*

Non ci ha che una sola maniera di formare un poligono con lati dati e un ultimo ignoto che sia il diametro della semicirconferenza nella quale gli altri lati sono iscritti.

Perocchè supponiamo che siasi trovato un cerchio il quale soddisfaccia alla questione; se prendasi un cerchio maggiore, le corde AB, BC, CD, ec. (fig. 175) corrisponderanno ad angoli al centro minori. La somma di questi angoli al centro sarà dunque minore di due angoli retti; così dunque le estremità dei lati dati non metteran più capo alle estremità di un diametro. L'inconveniente contrario avrà luogo se prendasi un cerchio minore; adunque il poligono di cui si tratta non può essere iscritto che in un solo cerchio.

Scolio. Si può cangiare come si voglia l'ordine dei lati AB, BC, CD, ec. e il diametro del cerchio circoscritto sarà sempre il medesimo, come pure la superficie del poligono, perchè quale che siasi l'ordine degli archi AB, BC, ec., basta che la loro somma faccia la semicirconferenza, e il poligono avrà sempre la medesima superficie, poichè esso sarà uguale al semicerchio meno i segmenti AB, BC, ec. la cui somma è sempre la stessa.

PROPOSIZIONE VI. — *TEOREMA.*

Di tutti i poligoni formati con lati dati il massimo *è quello che si può iscrivere in un cerchio.*

Sia ABCDEFG (fig. 177) il poligono iscritto, ed *abcdefg* il non iscrittibile formato con lati uguali, in modo che si abbia AB=*ab*, BC=*bc*, ec.; dico che il poligono iscritto è maggiore dell'altro.

Si tiri il diametro EM; si congiunga AM, MB; sopra *ab*=AB si faccia il triangolo *abm* uguale ad ABM, e si congiunga *em*.

In virtù della proposizione IV, il poligono EFGAM è maggiore di *efgam*, a meno che quest' ultimo non possa essere parimente iscritto in una semicirconferenza di cui il lato *em* sarebbe il diametro, nel qual caso i due poligoni sarebbero uguali in virtù della proposizione V. Per la stessa ragione il poligono EDCBM è maggiore di *edcbm*, salvo la medesima eccezione nella quale vi sarebbe uguaglianza. Adunque l'intiero poligono EFGAMBCDE è maggiore di *efgambcde*

quando pure non siano intieramente uguali; ma essi non son tali, perchè l'uno è iscritto nel cerchio e l'altro è supposto non iscrittibile; dunque il poligono iscritto è il maggiore. Togliendo da una parte e dall'altra i triangoli uguali ABM, *abm*, rimarrà il poligono iscritto ABCDEFG maggiore del non iscrittibile *abcdefg*.

Scolio. Si dimostrerà come nella proposizione V, che non può esservi che un solo cerchio, e per conseguenza un sol poligono *massimo* il quale soddisfaccia alla questione; e questo poligono sarebbe ancora della stessa superficie, in qualunque modo si cangi l'ordine dei suoi lati.

PROPOSIZIONE VII. — *TEOREMA.*

Il poligono regolare è massimo tra tutti i poligoni isoperimetri e di uno stesso numero di lati.

Perocchè, secondo il teorema II, il poligono *massimo* ha tutti i suoi lati uguali; e, secondo il teorema precedente, è iscrittibile nel cerchio; dunque questo poligono è regolare.

PROPOSIZIONE VIII. — *LEMMA.*

Due angoli al centro, misurati in due cerchi differenti, stanno fra loro come gli archi compresi divisi pei loro raggi.

Così l'angolo C (fig. 178) sta all'angolo O come il rapporto $\frac{AB}{AC}$ sta al rapporto $\frac{DE}{DO}$.

Con un raggio OF uguale ad AC si descriva l'arco FG compreso tra i lati CD, OD prolungati; a cagione dei raggi uguali AC, OF si avrà da prima C : O : : AB : FG (17), o $\frac{AB}{AC} : \frac{FG}{FO}$. Ma a cagione degli archi simili FG, DE si ha (11) FG : DE : : FO : DO; dunque il rapporto $\frac{FG}{FO}$ è uguale al rapporto $\frac{DE}{DO}$, e si ha per conseguenza C : O : : $\frac{AB}{AC} : \frac{DE}{DO}$.

PROPOSIZIONE IX. — *TEOREMA.*

Di due poligoni regolari isoperimetri quello che ha il maggior numero di lati è il maggiore.

Sia DE (fig. 179) la metà del lato di uno dei poligoni, O il suo centro, OE la

sua apotema; sia AB la metà del lato dell' altro poligooo, C il suo centro, CB la sua apotema. Si suppongano i centri O e C situati ad una distaoza qualunque OC, e le apoteme, OE, CB nella direzione OC: così DOE e ACB saranno le metà degli angoli al centro dei poligoni, e siccome questi angoli non sono uguali, le rette CA, OD, prolungate, s' incontreranno in un puoto F; da questo punto si abbassi ropra OC la perpendicolare FG; dai puoti O e C, come centri, si descrivano gli archi GI, GH, terminati ai lati OF, CF.

Posto ciò, si avrà pel lemma precedente, $O : C :: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$; ma DE sta al perimetro del primo poligono come l'angolo C a quattro angoli retti, e AB sta al perimetro del secundo come l' angolo C a quattro angoli retti; dunque, per essere i perimetri dei poligoni uguali, $DE : AB :: O : C$, o $DE : AB :: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$. Moltiplicando gli antecedenti per OG e i conseguenti per CG, si avrà $DE \times OG : AB \times CG :: GI : GH$. Ma i triangoli simili ODE, OFG dànno $CE : OG :: DE : FG$, donde risulta $DE \times OG = OE \times FG$; si avrà parimente $AB \times CG = CB \times FG$; dunque $OE \times FG : CB \times FG :: GI : GH$, o $OE : CB :: GI : GH$. Se dunque si faccia vedere che l' arco GI è maggiore dell'arco GH, ne seguirà che l'apotema OE è maggiore di CB.

Dall' altra parte di CF si faccia la figura CKx intieramente uguale alla figura CGx, in maniera che si abbia $CK = CG$, l'angolo $HCK = HCG$, e l'arco $Kx = xG$; la curva KxG invilupperà l' arco KHC, e sarà quindi maggiore di quest'arco (9). Dunque Gx, metà della curva, è maggiore di GH metà dell' arco; dunque, a più forte ragione, GI è maggiore di GH.

Risulta da ciò che l' apotema OE è maggiore di CD: ma i due poligoni, avendo lo stesso perimetro stanno fra loro cume le loro apoteme (7); dunque il poligono del cui lato DE è la metà, è maggiore di quello il cui lato ha per metà AB; il primo ha più lati, poichè il suo angolo al centro è minore; dunque di dne poligoni regolari isoperimetri, quello che ha il maggior numero di lati è il maggiore.

PROPOSIZIONE X. — *TEOREMA.*

Il cerchio è maggiore di ogni poligono isoperimetro.

Si è provato già che di tutti i poligoni isoperimetri a di uno stessu numero di lati il poligono regolare è il massimo, sicchè non si tratta che di paragonare il cerchio ad un poligono regolare isoperimetro. Sia AI (fig. 180) la metà del lato di questo poligono, C il suo centro. Sia nel cerchio isoperimetro l'angolo $DOE = ACI$ per conseguenza l'arco DE uguale ad AI metà nel lato. Il poligono P sta

al cerchio C come il triangolo ACI sta al settore ODE; si avrà così P : C : : $\frac{1}{2}$ AI×CI : $\frac{1}{2}$ DE×OE : : CI : OE. Sia menata al punto E la tangente EG che incontri OD prolungato in G; i triangoli simili ACI, GOE, daranno la proporzione CI : OE : : AI DE : GE; dunque P : C : : DE : GE, o come DE × $\frac{1}{2}$ OE ch'è la misura del settore DOE sta a GE × $\frac{1}{2}$ OE ch'è la misura del triangolo GOE; ora il settore è minore del triangolo; dunque P è minore di C, e quindi il cerchio è maggiore di ogni poligono isoperimetro.

FINE DELLA PARTE PRIMA.

ENUNCIAZIONI DI PROBLEMI DA RISOLVERE

Tutto quanto si è detto nei quattro libri che riguardano alla geometria piana, forma il complesso delle nozioni fondamentali e indispensabili nello studio di questa scienza, gli elementi primi in somma ond'ella risulta. Ma non si dee già credere che lo studio della geometria piana abbia quivi il suo limite, e che percorse le materie di quei quattro libri, niuna più ce n'abbia da percorrere; che anzi non è a dire quante e quante siano tutte le altre proposizioni alle quali si può giungere ancora dopo le elementari vedute fino qui. Nè tale studio dee essere punto pretermesso da chi brami possedere la geometria nel suo campo più vasto, ed acquistare per mezzo dell'esercizio di risolvere problemi e dimostrar teoremi non conosciuti negli elementi, quella sveltezza e quello sguardo acuto di vedere le quistioni geometriche, senza dei quali non è da sperare di potere prontamente attecchire nelle altre branche delle matematiche.

Ad agevolare questo studio, noi proponiamo qui appresso una serie di problemi da risolvere e di teoremi da dimostrare, dividendoli in varie classi, secondo lo scopo comune che in loro si scorge, affine che si comprenda a che si riduce in sostanza l'obbietto di ciascuno.

In quanto ai problemi non abbiam fatto parola dei casi di possibilità o d'impossibilità per quelli in cui questi casi sono da considerare, perocchè si sa ch'essi non ponno ordinariamente conoscersi se non dalla stessa costruzione; e pochissimi sono quei problemi in cui possano vedersi *a priori*.

PRIMA CLASSE.

Determinare di grandezza o di posizione una linea retta, qualora siano assegnate due condizioni.

Si sono già sciolti nel testo alcuni problemi relativi a questa classe; io gli enuncierò nuovamente, ma in altri termini che facciano meglio vedere com'essi appartengono alla presente classe. Quando si troverà scritto: lib. 1, lib. 2, ec., si dovrà intendere che il problema si trova in quelli relativi a quel libro.

Trovare quella linea retta che sia una data parte aliquota di una retta data. (lib. 1, prob. 1, lib. 3. prob. 1.).

Determinare quella linea retta che passi per un dato punto e sia perpendicolare ad una retta data. (lib. 1, prob 2, 3.).

Determinare quella linea retta che passi per un punto dato su di una linea retta e che faccia un dato angolo con questa retta. (prob. 4. A questo pure riduconsi i probl. 7, 8 e 9. Il 2° n'è un caso particolare).

Trovare la linea retta che divide un dato angolo per metà (lib. 1, prob. 5).

Trovare quella retta che passa per un punto dato ed è parallela ad una retta data di posizione rispetto a questo punto. (lib. 1, probl. 6).

Trovare la linea retta ch' è il terzo lato di un triangolo di cui si conoscano gli altri due lati e l'angolo ch' essi comprendono. (lib. 1, probl. 8, 11).

Data una circonferenza ed un punto sopra o fuori di essa, trovare una retta che passi per questo punto e sia tangente alla circonferenza. (lib. 2, prob. 14).

Trovare la linea retta ch' è comune misura tra due rette date commensurabili. (lib. 1, prob. 17).

Determinare la linea retta ch' è quarta proporzionale in ordine a tre rette date. (lib. 3, prob. 2. Questo comprende anche il 7°, 8° e 9°).

Trovare una linea retta che sia media proporzionale tra due rette date. (lib. 3, prob. 3. A questo anche riducesi il 6° e il 10°).

Trovare una linea retta che sia tal parte di una linea retta data, ch' ella sia media proporzionale tra questa retta data e l' altra parte. (lib. 3, prob. 4).

Determinare quella linea retta che passa per un punto dato fra i lati di un angolo in modo che le sue parti intercette fra questo punto e i lati dell' angolo siano fra loro uguali. (lib. 3, prob. 5).

Trovare una linea retta che sia il lato di un quadrato equivalente alla somma di quanti quadrati dati si vogliano, o alla differenza di due quadrati dati. (lib. 3, prob. 9. Vi è contenuto il 14°).

Trovare una linea retta che sia il lato di un quadrato che abbia un dato rapporto ad un quadrato dato. (lib. 3, prob. 12. Vi è contenuto il 15°).

Determinare una linea retta che sia tal parte di una retta data che il rettangolo di essa parte nell' altra sia equivalente ad un quadrato dato. (lib. 3, prob. 17).

Determinare quella linea retta che aggiunta ad una retta data, dia il rettangolo della somma di queste due in essa aggiunta equivalente ad un quadrato dato. (lib. 3, prob. 18).

Determinare una linea retta che sia corda in un dato cerchio e che sottenda la 4ª parte, o l' 8ª parte, o la 16ª parte, ec. della circonferenza. (lib. 4, prop. 3).

Determinare una linea retta che sia corda in un dato cerchio, e che sottenda la 3ª parte, o la 6ª parte, o la 12ª parte, ec. della circonferenza. (lib. 4, prop. 4).

Determinare quella linea retta che sia corda in un dato cerchio e che sottenda la 5ª parte, o la 10ª parte, o la 20ª parte ec. della circonferenza. Od anche che sottenda la 15ª parte, la 30ª parte, la 60ª parte, ec. della circonferenza. (lib. 4, prop. 5).

Determinare quella linea retta che sia il lato del poligono regolare iscritto in una data circonferenza, quando sia conosciuto quello del poligono simile circoscritto, e viceversa. (lib. 4, prop. 6).

Quelli che proponiamo a risolvere sono i seguenti. Se il lettore è versato

nell' *applicazione dell' algebra alla geometria* potrà pure risolverli coi metodi forniti da questa scienza.

Tracciare una linea retta che passi per un dato punto e faccia un determinato angolo con una retta data di posizione rispetto a questo punto.

Trovare quella retta della quale un punto qualunque sia ugualmente distante dai lati di un angolo dato.

Tracciare una retta che passi per un dato punto ed interseghi due rette parallele date di posizione rispetto a questo punto, in modo che la parte compresa fra queste due parallele sia uguale ad una retta data.

Trovare una linea retta che passi per un punto dato fra i lati di un angolo dato in modo, che le parti di questa retta comprese fra il punto e i lati dell'angolo siano fra loro in data ragione.

Determinare una linea retta che sia terminata ai lati di un dato angolo, conoscendosi l' inclinazione di questa retta su di uno di essi lati.

Da un punto dato fuori di un angolo, tirare una retta tale, che le parti di questa retta comprese tra il punto e i due lati dell'angolo siano proporzionali a due rette date.

Da un punto dato fuori di un angolo, condurre una retta tale, che il rettangolo delle parti comprese tra il punto e i lati dell' angolo, sia equivalente ad un quadrato dato.

Da un punto preso sulla retta che divide per metà un angolo dato, tirare una retta in modo, che la parte compresa fra i lati dell' angolo sia la minima possibile.

Da un punto dato fra i lati di un angolo tirare una retta in modo che le parti dei lati dell' angolo comprese fra il vertice e questa retta siano fra loro uguali— O che stiano generalmente in data ragione.

Dato un punto della retta che divide per metà un angolo dato, menare una retta in modo che la parte compresa fra i lati dell' angolo sia uguale ad una retta data.

Da un punto preso fra i lati di un dato angolo, condurre una retta in modo che la somma o la differenza dei segmenti formati sui due lati dell' angolo sia uguale ad una retta data.

Dal vertice di un angolo condurre una linea retta tale, che tirando da uno qualunque dei suoi punti due rette inclinate con determinati angoli ai lati dell' angolo dato, queste rette stiano fra loro come due rette date.

Da un punto preso in un dato cerchio tirare la minima corda.

Trovare una linea retta che interseghi due date circonferenze concentriche in modo che le parti di questa retta che divengono corde siano fra loro in data ragione.

Trovare una linea retta che sia il lato del quadrato iscritto in un triangolo, del quale si conosca un lato e la perpendicolare abbassata su questo lato dal vertice dell' angolo opposto.

Dati due punti ed una linea retta di posizione rispetto ad essi, condurre da

questi due punti due rette che s' interseghino in un punto della retta data e facciano un dato angolo.

Trovare il lato di un quadrato, conoscendosi la differenza tra la diagonale e questo lato.

Dato un semicerchio ed una perpendicolare al diametro, tirare dall' estremità del diametro una corda in modo, che la sua parte compresa fra la circonferenza ed il punto d' intersezione alla data perpendicolare sia uguale al raggio.

Dato un semicerchio ed una perpendicolare al diametro, tirare da una estremità del diametro una corda in modo che la sua parte compresa fra la circonferenza e il punto d' intersezione colla data perpendicolare sia uguale alla corda che unisce l' altra estremità del diametro col punto ove la prima corda incontra la circonferenza.

Dati due punti di posizione rispetto ad una data retta, trovare su di questa un punto che congiunto coi due dati, gli angoli che le congiungenti fanno ciascuna con ciascuna con le due parti in cui il punto divide la retta data siano fra loro uguali.

Dopo la risoluzione di questo problema sarà facilissima quella del problema che segue.

Da due punti presi fra i lati di un angolo dato inclinare su questi lati due rette in modo che congiunti i punti d' intersezione, i quattro angoli che le tre rette fanno colle quattro parti dei lati, siano uguali fra loro.

Dati due punti sur una circonferenza trovarne un terzo che congiunto con questi due, dia due corde che stiano fra loro in data ragione.

Date due circonferenze concentriche e dato un punto far passare per questo punto una segante in maniera, che la parte compresa fra le due date circonferenze sia uguale ad una retta data.

Date due circonferenze che s' intersegano menare da uno dei punti d' intersezione una retta nelle due circonferenze uguale ad una retta data.

Dati due triangoli iscrivere il minore nel maggiore. Questo problema si risolve per mezzo del precedente.

Data una circonferenza e un punto dentro o fuori di essa menare per questo punto una segante in modo che la parte compresa nella data circonferenza sia uguale ad una retta data.

Da un punto di una data circonferenza menare da una segante di tal grandezza e posizione, che le distanze delle sue estremità dai punti ov' ella incontra la circonferenza siano in data ragione, e che il rettangolo di queste distanze sia equivalente ad un quadrato dato.

Data una circonferenza ed una segante, trovare su questa segante un punto tale che la tangente condotta da questo punto alla circonferenza sia uguale ad una retta data.

Su di un arco dato trovare un punto tale che il rettangolo delle corde menate da questo punto alle estremità dell' arco sia uguale ad un quadrato dato.

Da un punto dato fuori di un cerchio menare una segante tale che la parte compresa nel cerchio, sia alla parte esterna in una data ragione.

Conoscendo un cerchio, una segante ed un punto della segante, menare una retta tale, che la parte di questa retta compresa nella circonferenza sia uguale ad una retta data, e che le distanze del punto dato ai due punti d'intersezione della retta cercata con la parte concava della circonferenza, e con la nota segante, siano uguali.

Conoscendo di grandezza e di posizione due rette, che s'incontrano, trovare un punto tale, che le rette condotte da questo punto alle estremità delle rette date, formino due angoli dati.

Sur una retta data trovare un punto di cui le distanze a due punti dati, siano in un dato rapporto.

Conoscendo due cerchi concentrici, ed un diametro, menare una segante che formi un angolo dato con questo diametro, e di cui le parti comprese tra il diametro e le due circonferenze, siano proporzionali a due rette date.

Sopra una linea retta data di grandezza elevare una perpendicolare tale che la differenza dei quadrati delle distanze di uno qualunque dei suoi punti alle estremità della retta data sia uguale ad un quadrato dato.

Dato un semicerchio e la tangente all'estremità del diametro, trovare su questa tangente un punto tale che congiungendolo con l'altra estremità del diametro, la parte esterna della segante sia uguale ad una retta data.

Dati tre punti sopra una medesima linea retta, trovare un punto fuori di questa retta, in modo che le tre rette che lo congiungono coi tre punti dati stiano fra loro in un dato rapporto.

Condurre una retta parallela ad un'altra in modo, che dalla sua intersegazione con due rette date di posizione nasca un triangolo di data superficie.

Da un punto preso fra i lati di un dato angolo, tirare una retta in modo che nasca un triangolo di data superficie.

Da un punto preso fra i lati di un dato angolo, tirare una retta in maniera, che il rettangolo dei due segmenti dei lati sia equivalente ad un quadrato dato.

Da un punto preso tra i lati di un dato angolo tirare una retta in modo, che il rettangolo delle sue parti comprese tra questo punto e i lati dell'angolo sia equivalente ad un quadrato dato.

Dati due punti fuori di una linea retta, trovarne un altro su questa retta in modo, che la differenza delle due congiungenti sia uguale ad una retta data.

Dati due punti su di una circonferenza trovarne un terzo tale, che la differenza delle due corde sia una quantità data — O che la somma dei loro quadrati sia una quantità data.

Tirare per un punto dato una retta in maniera che il rettangolo delle perpendicolari condotte su questa retta da due altri punti dati sia una quantità data.

Dati di posizione tre punti, trovarne un terzo che congiunto con questi tre, dia le tre congiungenti in ragione di tre quantità date.

Dato un cerchio ed una retta, tirare una tangente che faccia un dato angolo colla retta data. — Vi è compreso il caso che sia perpendicolare.

Tirare una tangente ad una data circonferenza, parallela ad una retta data.

Dato un cerchio ed una retta tirare una tangente in modo che la parte compresa fra il punto di contatto e la retta data sia di determinata grandezza.

Dato un cerchio e due parallele tirare una tangente che interseghi le due parallele in modo che la parte compresa fra queste parallele sia uguale ad una retta data.

Dato un angolo ed un cerchio tra i suoi lati, tirare a questo cerchio una tangente in modo, che le sue parti comprese tra il punto di contatto e i lati dell'angolo siano in un dato rapporto.

Tirare la tangente comune a due cerchi dati.

Date due circonferenze tirare una tangente ad una di esse in modo, che interseghi l'altra, e la parte compresa in quest'altra circonferenza sia uguale ad una retta data.

Data la posizione e la grandezza di una retta menata parallelamente alla base di un triangolo rettangolo, menare dal vertice una retta in modo, che la parte intercetta fra la base e la retta data, sia uguale a quella parte della retta data compresa fra la retta cercata e un lato del triangolo.

SECONDA CLASSE.

Descrivere una circonferenza, quando siano assegnate tre condizioni.

I problemi appartenenti a questa classe che si sono sciolti nel testo, sono i seguenti:

Descrivere una circonferenza che passi per tre punti dati non in linea retta. (lib. 2, prob. 13).

Descrivere una circonferenza che sia tangente a tre rette date di posizione. (lib. 2, prob. 15)

Tracciare una circonferenza che passi per le estremità di una retta data di grandezza, e formi sopra di questa retta un segmento capace di un angolo dato. (lib. 2, prob. 16).

Gl'infrascritti sono quelli che proponiamo a risolvere.

Descrivere una circonferenza che sia tangente a due rette date e passi per un dato punto. Questo punto potrebbe anche stare sopra una delle rette date.

Descrivere una circonferenza che passi per due dati punti e sia tangente ad una retta data. Questa retta potrebbe passare per uno dei due punti.

Costruire una circonferenza che sia tangente a due rette date di posizione e ad una data circonferenza.

Descrivere una circonferenza nella quale due rette date sottendano due archi l'uno doppio dell'altro.

Descrivere una circonferenza che abbia il centro in un punto dato e che sia tangente ad un'altra circonferenza data.

Descrivere una circonferenza che abbia il centro in un punto dato e che sia tangente ed una retta data.

Descrivere una circonferenza di dato raggio che sia tangente ad una retta in un punto dato in essa.

Descrivere una circonferenza di dato raggio che tocchi una retta data e passi per un punto dato fuori di questa retta.

Descrivere una circonferenza di dato raggio che tocchi una data circonferenza e che passi per un punto dato.

Descrivere una circonferenza di raggio dato che tocchi due rette date di posizione.

Descrivere una circonferenza di raggio dato che tocchi una retta data ed una circonferenza data.

Descrivere una circonferenza di dato raggio che tocchi due altre date circonferenze.

Condurre per due punti dati una circonferenza tangente ad una circonferenza data.

Descrivere una circonferenza che passi per un dato punto e sia tangente ad una retta data e ad una circonferenza data.

Descrivere una circonferenza che passi per un dato punto e sia tangente a due circonferenze date.

Descrivere una circonferenza tangente a due altre date circonferenze e ad una retta data.

Descrivere una circonferenza tangente a tre altre circonferenze date.

Date due circonferenze concentriche, descrivere una circonferenza tale che se ai punti ov'ella incontra le circonferenze date si menino le tangenti alle tre circonferenze, queste tangenti formino tra loro angoli dati.

Descrivere una circonferenza che tocchi un' altra data circonferenza in modo, che tirando da questo punto una segante qualunque le due parti di questa retta comprese tra le circonferenze e nel cerchio dato, siano in dato rapporto.

Descrivere una circonferenza tale, che le distanze di uno qualunque dei suoi punti alle estremità di una retta data siano in un dato rapporto.

Descrivere una circonferenza che tagli due circonferenze concentriche in punti tali, che se conducansi da questi punti le tangenti alla circonferenza cercata, queste tangenti formino angoli dati.

Iscrivere tre cerchi uguali in un dato cerchio, in modo che siano tangenti alla circonferenza data e fra loro.

TERZA CLASSE.

Costruire un triangolo allorchè siano date tre condizioni.

Nel testo si sono risoluti i seguenti problemi appartenenti a questa classe.

Date tre cose di un triangolo, tra le quali vi sia almeno un lato, costruire il triangolo. (lib. 1, prob. 8, 9, 10, 11).

Proponiamo ancora questi altri.

Costruire un triangolo isoscele equivalente ad un triangolo dato e della medesima altezza.

Costruire un triangolo, conoscendo dua lati e la retta che divida l' angolo ch' essi comprendono per metà.

Costruire un triangolo, conoscendo due lati e la retta che passa pel vertice dell' angolo compreso a divide il terzo lato in parti proporzionali a due rette date.

Costruire un triangolo conoscendo un angolo, un lato adiacente e la somma dei due altri lati.

Costruire un triangolo rettangolo, data l' ipotenusa e la differenza dei due cateti.

Costruire un triangolo rettangolo dato un cateto a la differenza tra l' ipotenusa e l' altro cateto.

Costruire un triangolo rettangolo di cui si conosca l' aia e il perimetro.

Costruire un triangolo di cui si conosca un lato, l' angolo opposto a il raggio del cerchio iscritto.

Date due circonferenze concentriche ed un triangolo, descrivera un triangolo che abbia due vertici sulla circonferenza maggiore e il terzo sulla minore, a sia simile al proposto.

Dato un lato e la somma o la differenza dei quadrati degli altri due lati, costruire il triangolo.

Costruire un triangolo conoscendone la base, l' altezza a l' angolo al vertice.

Data la base l' angolo al vertice e la superficie di un triangolo, costruire questo triangolo.

Costruire un triangolo, conoscendo la base, l' angolo al vertice e il rapporto degli altri due lati.

Conoscendo la base, il rapporto degli altri due lati e la retta sulla quale dee trovarsi il vertice, costruire il triangolo.

Costruire un triangolo, conoscendo un angolo, la somma dai lati che comprendono quest' angolo e la perpendicolare condotta dal vartice di quest' angolo sul lato opposto.

Costruire un triangolo, conoscendo un lato uno degli angoli adiacenti, e la perpendicolare abbassata dal vertice di quest' angolo sul lato opposto.

Costruire un triangolo, data la superficie, e due angoli.

Date due perpendicolari, ed una di esse di grandezza, e dato un punto di posizione, costruire un triangolo rettangolo che passi per questo punto, abbia per altezza del vertice dell' angolo retto la perpendicolare data di grandezza, ed abbia l' ipotenusa sull' altra perpendicolare.

Data l' ipotenusa e un punto per il quala dee passara un cateto, descrivere il triangolo rettangolo.

Dato un cateto e un punto per il quale dee passare l' ipotenusa, costruire il triangolo rettangolo.

Data la base, il punto di questa base dove cade l' altezza, e l' angolo al vertice, descrivere il triangolo.

Costruire un triangolo, conoscendone la superficie, uno degli angoli, e sapendo che il lato opposto all' angolo dato dee passare per un dato punto.

Dato un punto fra i lati di un angolo, trovare due altri punti sui lati di quest' angolo in modo, che congiungendo con tre rette questi tre punti, nasca un triangolo simile ad un triangolo dato.

Costruire un triangolo rettangolo equivalente ad un trapezio dato, e che abbia uno dei suoi cateti uguale ad uno dei lati paralleli di questo trapezio.

Costruire un triangolo rettangolo, conoscendo le due rette menate perpendicolarmente dalle estremità dell' ipotenusa sui due cateti.

Descrivere un triangolo rettangolo, conoscendo l' ipotenusa e la differenza delle due rette menate dalle estremità al centro del cerchio iscritto.

Conoscendo la base, l' altezza, e il prodotto degli altri due lati, costruire il triangolo.

Costruire un triangolo conoscendo le tre rette menate dai vertici degli angoli sui punti medi dei lati opposti.

Determinare un triangolo, conoscendo il lato del quadrato e il raggio del cerchio iscritto.

Costruire un triangolo rettangolo, data la somma o la differenza dei cateti, e la somma o la differenza dell' ipotenusa alla perpendicolare abbassata dal vertice dell' angolo retto.

Costruire un triangolo conoscendo due lati, e una retta condotta dal vertice dell' angolo ch' essi comprendono, che divide il lato opposto in data ragione.

Conoscendo due lati di un triangolo, e i segmenti determinati da due rette uguali menate su questi lati dai vertici degli angoli opposti, determinare il triangolo.

Essendo data l' aia di un triangolo rettangolo, i cui lati siano in progressione aritmetica, determinare il triangolo.

Data l' aia di un triangolo rettangolo i cui lati siano in progressione geometrica, determinare il triangolo.

Costruire un triangolo, conoscendo un lato, l' angolo opposto, e il lato del rombo iscritto.

Dato il vertice di un triangolo isoscele, due parallele sulle quali debbono trovarsi le estremità della base e dato l'angolo che dee fare questa base colle parallele, costruire il triangolo.

Per tre punti dati di posizione, menare tre rette che formino un triangolo uguale ad un triangolo dato.

Circoscrivere ad un triangolo dato il massimo triangolo equilatero.

Enunciazioni di teoremi da dimostrare.

Le rette menate dai vertici di un triangolo sui punti medi dei lati opposti tagliano nel medesimo punto.

Le perpendicolari condotte sui lati di un triangolo dai vertici degli angoli opposti, s' incontrano nel medesimo punto.

Se da un punto O (fig. 87) preso comunque dentro di un triangolo si tirino le perpendicolari OD, OE, OF sui lati, si avrà sempre

$$\overline{BD}^2+\overline{AF}^2+\overline{EC}^2=\overline{AD}^2+\overline{FC}^2+\overline{BE}^2.$$

Se per un punto preso comunque dentro di un triangolo si conducano ai tre vertici tre rette e si polunghino fino a che incontrino i lati opposti, determinando sopra un lato i due segmenti a e b, sopra un altro i due a', b', e finalmente sul terzo i due a'', b'' si avrà sempre $a\times a'\times a''=b\times b'\times b''$.

Di tutti i triangoli formati con un dato angolo di cui i due lati facciano una somma data, il massimo è quello in cui questi due lati sono uguali.

Fra tutti i triangoli che hanno i loro vertici allogati su di uno stesso arco, ed hanno per base la corda di questo arco, il triangolo isoscele è quello in cui i due lati non determinati formano la massima somma.

Qualora da un punto qualunque preso fra due lati adiacenti di un parallelogrammo, si tirino le perpendicolari sulla diagonale e sui lati adiacenti, il prodotto della diagonale per la perpendicolare menata su di essa, è uguale alla differenza dei prodotti dei due lati del parallelogrammo per le perpendicolari menate su questi lati.

Se nel piano di un parallelogrammo si prenda un punto qualunque il triangolo che ha per vertice quel punto e per base la diagonale sarà uguale alla somma o alla differenza dei triangoli che hanno per basi i due lati del parallelogrammo, che partono dall' estremo della diagonale, e per vertice quel punto.

Se quattro cerchi toccano ciascuno, internamente o esternamente, tre lati di un quadrilatero piano qualunque, i centri di questi cerchi staranno sempre sopra una medesima circonferenza.

Se i lati di un quadrilatero circoscritto toccano la circonferenza ai vertici degli angoli di un quadrilatero iscritto, tutte le loro diagonali si taglieranno nel medesimo punto.

I teoremi che ora seguono li ho formati da certune delle tante formolette che si possono dimostrare nella moltiplicazione algebrica. Ho posto dopo ciascuna enunciazione la formoletta corrispondente, la quale non può trascendere il secondo grado. Sarà facilissimo vedere l' analogia perfetta che hanno tutti questi teoremi con le proposizioni VIII, IX, X del libro III, e con quelle di Euclide, di cui è parola nella nota da noi posta alle tre proposizioni dette dianzi.

Se una retta sia divisa in due parti qualunque e vi si aggiunga per dritto un'altra, il rettangolo della retta più la giunta, come una retta sola, in una parte della retta, è uguale al quadrato di questa parte, più i due rettangoli di essa parte nell' altra e nella giunta — La formola è $[(a+b)+c]\,a=a^2+ab+ac$.

Se una linea retta sia la differenza di due altre, il rettangolo di essa nella maggiore è uguale al quadrato della maggiore, meno il rettangolo della maggiore nella minore — La formola è $(a-b)\,a=a^2-ab$.

Il rettangolo della somma di una linea retta e del doppio di un'altra, è uguale al quadrato della prima più il doppio rettangolo della prima per la seconda — La formola è $(a+2b)\,a=a^2+2ab$.

Se una linea retta sia divisa per metà a le si aggiunga un'altra per dritto, il rettangolo della retta più la giunta nella metà è uguale al doppio quadrato della metà più il rettangolo della metà nella giunta — La formola è $(a+b)\frac{a}{2}=\frac{a^2}{2}+\frac{ab}{2}$.

Se una linea retta sia divisa in parti uguali ed in parti disuguali, il quadrato della retta è doppio della somma dei rettangoli della metà in ciascuna delle parti disuguali — Dinotando a la metà della retta, la formola è $(a+b)a+(a-b)a=2a^2=\frac{(2a)^2}{2}$.

Se una linea retta sia divisa in parti uguali e in parti disuguali, il quadrato della parte maggiore è uguale al doppio quadrato della metà, più il rettangolo della retta in quella ch'è trai punti di sezione, meno il rettangolo delle parti disuguali. E il quadrato della parte minore è uguale al doppio quadrato della metà, meno il rettangolo della retta in quella ch'è trai punti di sezione, meno il rettangolo delle parti disuguali — Rappresentando ancora con a la metà della retta, la formola è $(a+b)^2=2a^2+2ab-(a+b)\,(a-b)$; $(a-b)^2=2a^2-2ab-(a+b)\,(a-b)$.

Se una linea retta sia divisa in due parti qualunque, la somma dei rettangoli di questa retta in ciascuna parte è uguale al quadrato della prima parte, più il quadrato della seconda parte più il doppio rettangolo di una nell'altra, o, che torna lo stesso, è uguale al quadrato di tutta la retta. $(a+b)a+(a+b)b=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

Questa poche proposizioni sono già sufficienti perchè il lettore vegga quante altre simili se ne potrebbero ancora formare, e perchè sappia convenientemente tradurre l'enunciato dal linguaggio algebrico nel geometrico.

PARTE SECONDA

GEOMETRIA SOLIDA

LIBRO PRIMO

DEI PIANI E DEGLI ANGOLI SOLIDI

DEFINIZIONI

I. Una linea retta è *perpendicolare ad un piano* quando è perpendicolare e tutte le rette che passano pel suo *piede* nel piano (prop. 4). Reciprocamente il piano è perpendicolare alla retta. Il *piede* della perpendicolare è il punto ove questa retta incontra il piano.

II. Una linea retta è parallela ad un piano quando non può mai incontrarlo a qualunque distanza si prolunghino l' uno e l' altro.

III. Due piani sono *paralleli* fra loro quando non possono mai incontrarsi a qualunque distanza si prolunghino entrambi.

IV. Sarà dimostrato (prop. 3) che la comune intersezione di due piani che s' incontrano è una linea retta; posto ciò, l'*angolo* o l' *inclinazione* scambievole di due piani è la quantità più o meno grande per la quale essi distanno l'uno dall'altro; questa quantità si misura (prop. 7) coll' angolo che fanno tra loro le due perpendicolari condotte in ciascuno di questi piani alla comune intersezione da un medesimo suo punto.

L' angolo di due piani si chiama *angolo diedro*. Esso può essere acuto, retto, o ottuso.

V. Un piano è perpendicolare ad un altro, quando l' angolo *diedro* ch' essi formano è retto.

VI. Si chiama generalmente *angolo poliedro* lo spazio angolare compreso fra più piani che s' incontrano in un medesimo punto. Si suol chiamare anche, ma meno propriamente, *angolo solido*. Così SABCD (fig. 199) è un angolo poliedro. In esso sono da considerare gli angoli rettilinei [1] ASB, BSC, CSD, ASD, che determinano le varie facce; i lati SA, SB, SC, SD; il vertice S; e gli angoli diedri formati dalle sue facce.

Bisogna distinguere questi angoli poliedri dagli angoli diedri, e la differenza sta in questo che gli angoli poliedri sono formati da vari angoli rettilinei, il che non avviene degli angoli diedri. Ci abbisognano almeno tre piani per formare un angolo poliedro.

Gli angoli poliedri si distinguono dal numero delle loro facce; così, il più semplice, cioè quello di tre facce, si chiama *angolo triedro*, quello di quattro *angolo tetraedro*, quello di cinque *angolo pentaedro*, ec.

PROPOSIZIONE PRIMA. — *TEOREMA*.

Una linea retta non può stare parte in un piano e parte al di fuori.

Perocchè, secondo la definizione del piano, quando una retta ha due punti comuni con un piano, giace intieramente in questo piano.

Scolio. Per conoscere se una superficie è piana, bisogna applicare una linea retta in sensi diversi su questa superficie, e vedere s' essa tocca sempre la superficie in tutta la sua estensione.

[1] Siccome all' espressione impropria di *angolo solido* si è sostituita da vari autori quella di *angolo poliedro*, così ameremmo che si bandisse anche quella di *angolo piano* per significare l' angolo di due linee rette. Perocchè un angolo non si può dire nè *solido* nè *piano* non essendo esso una parte dell' estensione, ma sì una semplice idea di rapporto per la quale noi diciamo che due rette, o due piani che s' intersegano, o più piani che s' incontrano in un medesimo punto distano più o meno fra loro. Noi perciò diremo sempre *angolo rettilineo*.

PROPOSIZIONE II. — *TEOREMA.*

Due linee rette che s' intersegano stanno in un medesimo piano e ne determinano la posizione.

Siano AB, AC (fig. 181) due linee rette che si taglino in A; si può concepire un piano nel quale si trovi la linea retta AB; è chiaro che questa retta non basta a fissar la posizione di quel piano, e ch' esso vi può rotare intorno come su una cerniera; si faccia rotare così questo piano fino a che passi pel punto C; allora la retta AC, che ha due dei suoi punti A e C in questo piano, vi starà tutta intiera; di più è chiaro che il piano rimane così fisso, e se continuasse a rotare non passerebbe più pel punto C; dunque la posizione di questo piano è determinato dalla sola condizione di contenere le due rette AB, AC.

Corollario I. Un triangolo ABC, o tre punti A, B, C, non in linea retta determinano la posizione di un piano.

Quattro punti presi ad arbitrio non istanno necessariamente in un medesimo piano, cioè il piano che passa per tre di essi non sempre passa pel terzo. Quindi i lati di un poligono di più di tre lati non sempre stanno sul medesimo piano; quando non vi stiano il poligono si dice *storto*.

II. Dunque anche due parallele AB, CD (fig. 182) determinano la posizione di un piano; perchè se tirisi la segante EF, il piano delle due rette AE, EF sarà quello delle parallele AB, CD.

III. Si è detto nella geometria piana che due linee rette perpendicolari ad una medesima sono parallele fra loro; ma quivi si supponevano le tre rette nel medesimo piano. Bisogna perciò guardarsi di tenere questa proposizione per generale, perocchè le due rette perpendicolari potrebbero essere tirate da un medesimo punto della terza retta in due piani distinti che passano per essa.

PROPOSIZIONE III. — *TEOREMA.*

Se due piani si tagliano la loro comune intersezione è una linea retta.

Perocchè, se fra i punti comuni ai due piani se ne trovassero tre che non fossero in linea retta, i due piani di cui si tratta, passando ciascuno per questi tre punti, non formerebbero che un solo e medesimo piano (2), il che è contro la supposizione.

PROPOSIZIONE IV. — *TEOREMA.*

Se una linea retta è perpendicolare a due altre che s'incontrano in un suo punto, sarà perpendicolare a una retta qualunque che si tiri nel piano di queste due, e quindi perpendicolare ad esso piano.

Siano le due rette PB, PC (fig. 183) perpendicolari ad AP nel medesimo punto P; dico che AP sarà perpendicolare ad ogni altra retta PQ che si tirerà nel piano MN determinato dalle due PB, PC.

Per un punto Q, preso ad arbitrio su PQ, si tiri la retta BC nell'angolo BPC, in modo che BQ=QC (prob. 5, lib. 3), e si congiungano AB, AQ, AC.

La base BC essendo divisa in due parti uguali al punto Q, il triangolo BPC darà (prop. 15, lib. 3, part. I).

$$\overline{PC}^2+\overline{PB}^2=2\overline{PQ}^2+2\overline{QC}^2.$$

Il triangolo BAC darà parimente

$$\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AQ}^2+2\overline{QC}^2.$$

Togliendo la prima uguaglianza dalla seconda, ed osservan-

do che i triangoli APC, APB, entrambi rettangoli in P, danno $\overline{AC}^2-\overline{PC}^2=\overline{AP}^2$, ed $\overline{AB}^2-\overline{PB}^2=\overline{AP}^2$, si avrà

$$\overline{AP}^2+\overline{AP}^2=2\overline{AQ}^2-2\overline{PQ}^2.$$

Dunque prendendo la metà da una parte e dall'altra, si ha $\overline{AP}^2=\overline{AQ}^2-\overline{PQ}^2$, o $\overline{AQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{PQ}^2$; dunque il triangolo APQ è rettangolo in P (14, 3); dunque AP è perpendicolare a PQ.

Scolio. Si vede da ciò, non solo ch'è possibile che una linea retta sia perpendicolare a tutte quelle che passano pel suo piede in un piano, ma che questo ha luogo sempre che questa retta sia perpendicolare a due rette menate nel piano; e così riman giustificata la definizione I.

PROPOSIZIONE V. — *TEOREMA.*

Se tre line rette siano perpendicolari ad una terza in un medesimo punto, staranno in un medesimo piano.

Perocchè se PQ (fig. 183) non si trova nel piano delle due PC, PB, allora il piano che passa per le due AP, PQ incontrerà il piano MN in una retta che, per la proposizione precedente sarà perpendicolare ad AP; ma, per ipotesi, anche PQ è perpendicolare ad AP; dunque da un medesimo punto si sarebbero tirate due perpendicolari ad una retta, stando tutte e tre nel medesimo piano; il che è assurdo.

Scolio. Si vede da ciò che quando una retta rota intorno ad una retta fissa, mantenendosi sempre ad essa perpendicolare, genera una superficie piana; di più questo piano è perpendicolare alla retta fissa. Quando la retta mobile fosse obbliqua, genererebbe una superficie convessa.

PROPOSIZIONE VI. — *TEOREMA.*

1.° *Da un punto preso sopra o fuori di un piano, non si può tirare che una sola perpendicolare a questo piano.* 2.° *Da un*

punto preso sopra o fuori di una linea retta non si può tirare che un sol piano perpendicolare a questa retta.

1.° Se il punto sta sopra del piano, elevando dal punto P (fig. 183) due perpendicolari al piano, e menando per queste due un piano la cui intersezione col piano MN sia PQ, le due perpendicolari di cui è parola sarebbero perpendicolari alla retta PQ, al medesimo punto P, e nel medesimo piano, il che è impossibile.

Se il punto sta fuori, le due perpendicolari AP, AQ, darebbero il triangolo APQ con due angoli retti APQ, AQP, il che è assurdo.

2° Se il punto sta sopra la retta, elvando da esso due piani perpendicolari alla retta, e facendo passare per AP un piano qualunque, questo intersegherà i due piani perpendicolari, in due rette perpendicolari ad AP al medesimo punto P e nel medesimo piano, il che è impossibile.

Se il punto sta fuori della retta, menando da esso due piani perpendicolari alla retta, e congiungendo i due punti ov'essi incontrano la retta col punto preso fuori, si avrebbe un triangolo con due angoli retti il che è assurdo.

PROPOSIZIONE VII. — *TEOREMA.*

1.° *La perpendicolare è più corta di ogni obbliqua.* **2.°** *Le oblique che distano ugualmente dal piede della perpendicolare sono uguali fra loro.* **3.°** *Di due oblique disugualmente distanti dalla perpendicolare, la maggiore è quella che più ne dista.*

1.° Infatti, AP (fig. 184) perpendicolare a PB è minore dell'obliqua AB.

2.° Essendo retti gli angoli APB, APC, APD, se le distanze PB, PC, PD sono uguali fra loro, i triangoli APB, APC, APD, avranno angoli uguali compresi fra lati uguali; dunque essi saranno uguali, e però le ipotenuse, ovvero le oblique AB, AC, AD saranno uguali fra loro.

3.° Parimente se la distanza PE si suppone maggiore di PD o della sua uguale PB, è chiaro che l'obbliqua AE sarà maggiore di AB, o della sua uguale AD.

Corollario I. La perpendicolare misura la vera distanza da un punto ad un piano, perchè è più corta di tutte le rette che si ponno condurre da questo punto al piano.

II. Tutte le obblique uguali AB, AC, AD, ec. hanno le loro estremità alla circonferenza BCD, descritta col piede P della perpendicolare come centro; dunque dato un punto A fuori di un piano, se vogliasi trovare su questo piano il punto P dove cadrebbe la perpendicolare abbassata da A, bisognerà prendere tre punti B, C, D, ugualmente distanti dal punto A, e cercare indi il centro del cerchio che passa per questi tre punti; questo centro sarà il punto cercato P.

PROPOSIZIONE VIII. — *TEOREMA.*

Se dal piede di una perpendicolare ad un piano si abbassi la perpendicolare sopra una retta che stia comunque nel piano, la retta che congiunge il piede di quest'ultima perpendicolare con un punto qualunque della perpendicolare al piano, sarà perpendicolare alla retta che sta nel piano.

Dal piede P (fig. 185) della perpendicolare AP sia menata PD perpendicolare sopra BC; dico che AD sarà perpendicolare a BC.

Prendasi DB=DC, e si congiunga PB, PC, AB, AC; poichè DB=DC, l'obbliqua PB=PC, e per rapporto alla perpendicolare AP, poichè PB=PC, l'obbliqua AB = AC (7); dunque la retta AD ha due dei suoi punti A e D ugualmente distanti dalle estremità B e C; dunque AD è perpendicolare sul punto medio di BC.

Corollario. Vedesi nello stesso tempo che BC è perpendicolare insieme alle due rette AD, PD.

Scolio. Le due rette AE, BC offrono l'esempio di due rette che non s'incontrano, perchè non sono situate in un medesimo piano.

La più corta distanza di queste rette è la retta PD, ch'è perpendicolare insieme ad AP ed a BC; essa è la più corta, perchè se congiungasi due altri punti, come A e B, si avrà AB>AD, AD>PD; dunque a più forte ragione, AB>PD. È palese il modo onde si tira questa perpendicolare comune.

Generalmente la vera distanza di due linee rette che stiano comunque nello spazio è la loro perpendicolare comune, come si vedrà nella prop. XIX. Qui le due rette AP, BC non hanno una situazione qualunque, ma tale che per una di esse si può menare un piano perpendicolare all' altra, il che non sempre avviene.

Le due rette AE, CB, quantunque non situate nel medesimo piano, si considerano come facienti fra loro un angolo retto, perocchè AE e la parallela condotta da uno dei suoi punti alla retta BC, farebbero tra loro un angolo retto. Similmente le rette AB e PD, le quali rappresentano due rette qualunque non situate nello stesso piano, si considerano come formanti fra loro lo stesso angolo che farebbe con AB la parallela a PD condotta da uno dei punti di AB.

PROPOSIZIONE IX. — *TEOREMA.*

Se una linea retta è perpendicolare ad un piano, qualunque sua parallela sarà perpendicolare a questo piano.

Sia la retta AP (fig. 186) perpendicolare al piano MN e sia DE parallela ad AP; dico che sarà pure DE perpendicolare al piano MN.

Secondo le parallele AP, DE conducasi il piano la cui intersezione col piano MN sarà PD; nel piano MN si tiri BC perpendicolare a PD e si congiunga AD.

Secondo il corollario del teorema precedente, BC è perpendicolare al piano APDE; dunque l'angolo BDE è retto; ma l'angolo EDP è anche retto, per essere AP perpendicolare a PD e DE parallela ad AP; dunque la retta DE è perpendicolare alle due DP, DB che passano pel suo piede nel piano MN; essa perciò è perpendicolare a questo piano.

Corollario I. Se due rette AP, DE sono perpendicolari allo stesso

piano MN, saranno parallele; perchè se non fosser tali, tirata dal punto D la parallela ad AP, questa parallela, per quello che si è or ora dimostrato, sarà perpendicolare al piano MN; si potrebbero dunque elevare due perpendicolari ad un piano da un medesimo suo punto, il che è assurdo.

II. Due linee rette A e B parallele ad una terza sono parallele fra loro; perocchè immaginandosi un piano perpendicolare alla retta C, le rette A e B parallele a questa perpendicolare saranno perpendicolari al medesimo piano, dunque pel corollario precedente, esse saranno parallele fra loro.

Qui si suppone che le tre rette non siano in un medesimo piano, altrimenti la proposizione sarebbe già nota.

PROPOSIZIONE X.—*TEOREMA.*

Se una linea retta è parallela ad un'altra sarà parallela ad ogni piano che passa per questa, e ad ogni retta tirata parallelamente a questa in uno di questi piani.

1.° Sia la retta AB (fig. 187) parallela a CD; dico che AB sarà parallela a un piano qualunque MN che passa per CD.

Infatti se AB ch'è nel piano ABCD incontrasse il piano MN, questo non potrebbe essere che in qualche punto della retta CD, intersezione comune dei due piani; ora AB non può incontrare CD, perchè parallele; essa dunque non incontrerà nemmeno il piano MN, cioè sarà parallela a questo piano.

2.° Se nel piano MN vi sia un'altra retta parallela a CD, allora AB e questa nuova retta essendo entrambe parallele a CD, secondo il corollario II della proposizione precedente, saranno parallele fra loro.

Scolio I. Fra tutti i piani che passano per CD ci ha pure quello ove si trova AB, cioè il piano delle due parallele; allora AB non cessa di essere parallela a questo piano; la sua distanza però da esso è zero.

II. La distanza di una retta ad un piano cui è parallela, è la perpendicolare comune alla retta e al piano, cioè la perpendicolare abbassata sul piano da un punto di questa retta.

La retta e il piano sono da per tutto ugualmente distanti.

Tutto ciò è facilissimo a dimostrare tirando per la retta un piano perpendicolare all' altro, perchè così il parallelismo della retta e del piano si ridurrà a quello della retta e della comune intersezione.

Da ciò pure si vede che i caratteri del parallelismo fra una retta e un piano, si riducono a quelli di due rette parallele; cioè della retta AB e di ogni altra CD intersezione di un piano condotto comunque per AB sopra MN.

PROPOSIZIONE XI. — *TEOREMA.*

Le intersezioni di due piani paralleli con un terzo piano sono parallele fra loro.

Siano i due piani paralleli MN, PQ (fig. 189) intersegati da un terzo FG; dico che le intersezioni EF, GH sono parallele.

Infatti se le rette EF, GH situate in uno stesso piano non sono parallele, prolungate s'incontreranno; dunque i piani MN, PQ nei quali esse si trovano medesimamente s'incontrerebbero; dunque non sarebbero paralleli, il che è contro la supposizione; dunque le intersezioni sono parallele.

PROPOSIZIONE XII. — *TEOREMA.*

Se una linea retta è perpendicolare ad un piano, sarà perpendicolare ad ogni piano ad esso parallelo.

Sia la retta AB (fig. 188) perpendicolare al piano MN; dico che sarà pure perpendicolare al piano PQ parallelo ad MN.

Si tiri ad arbitrio BC nel piano PQ, per AB, BC conducasi un piano ABC, la cui intersezione col piano MN sia AD; l'intersezione AD sarà parallela a BC (12); ma la retta AB perpendicolare al piano MN è perpendicolare alla retta AD; dunque essa sarà pure perpendicolare alla parallela BC; e poichè AB è perpendicolare ad ogni retta tirata pel suo piede nel piano PQ, sarà perpendicolare a questo piano.

Corollario. Due piani perpendicolari ad una stessa retta sono paralleli fra loro. Poichè se PQ non è parallelo ad MN tirando dal punto B un piano parallelo ad MN, questo sarebbe perpendicolare ad AB; ma PQ è pure per ipotesi perpendicolare ad AB; dunque dal medesimo punto B si sarebbero elevati due piani perpendicolari ad AB il che è assurdo (6); dunque PQ è parallelo ad MN.

PROPOSIZIONE XIII. — *TEOREMA.*

Le parallele comprese fra due piani paralleli sono uguali.

Siano le parallele EG, FH (fig. 189) comprese fra i due piani paralleli MN, PQ; dico che queste parallele sono uguali.

Per le parallele EG, HI facciasi passare il piano EGFH che incontrerà i piani paralleli secondo EF, GH. Le intersezioni EF, GH sono parallele fra loro; ma, per ipotesi, EG, FH sono pure parallele; dunque la figura EGHF è un parallelogrammo; dunque EG=FH.

Corollario. Segue da ciò che *due piani paralleli sono da per tutto ugualmente distanti;* perocchè se EG ed FH sono perpendicolari ai due piani MN, PQ, esse saranno parallele fra loro (9); dunque saranno uguali.

PROPOSIZIONE XIV. — *TEOREMA.*

Se due angoli situati nello stesso piano hanno i lati rispettivamente paralleli e rivolti nel medesimo senso, questi angoli saranno uguali e i loro piani saranno paralleli.

Sia CA (fig. 190) parallelo a DB ed AE a BF, e tutti diretti nello stesso senso; dico essere l'angolo CAE uguale a DBF, e i loro piani essere paralleli.

Prendasi AC=BD ed AE=BF e congiungasi CE, DF, AB, CD, EF. Poichè AC è uguale e parallela a BD, la figura ABDC è un parallelogrammo; dunque CD è uguale e parallela ad AB. Per

simile ragione, EF è uguale e parallela ad AB; dunque ancora CD è uguale e parallela ad EF; la figura CEFD è dunque un parallelogrammo, e perciò il lato CE è uguale e parallelo a DF; dunque i triangoli CAE, DBF sono equilateri fra loro; quindi l'angolo CAE=DBF. Se le aperture fossero rivolte in sensi contrari i due angoli sarebbero supplementari.

In secondo luogo dico che il piano ACE è parallelo al piano BDF. Si supponga infatti che il piano parallelo a BDF condotto pel punto A incontri le rette EF, CD in punti diversi da C ed E, per esempio, in G ed H; allora secondo la proposizione XIII, le tre rette AB, GD, FH saranno uguali; ma le tre AB, CD, EF sono pure uguali; dunque si avrebbe CD=GD ed FH=EF; il che è assurdo, nato dall'aver supposto che il piano parallelo a BDF condotto pel punto A incontrasse le rette EF, CD in punti diversi da C ed E; deve perciò incontrarle nei punti C ed E; dunque il piano ACE è parallelo a BDF.

Corollario. Se due piani paralleli MN, PQ sono incontrati da due altri piani CABD, EABF, gli angoli CAE, DBF, formati dalle intersezioni coi piani paralleli, saranno uguali; perchè l'intersezione AC è parallela a BD, AE parallela a BF; dunque l'angolo CAE=DBF.

PROPOSIZIONE XV. — *TEOREMA.*

Se tre linee rette non situate nello stesso piano sono uguali e parallele, i triangoli formati dall' una parte e dall' altra congiungendo le estremità di queste rette, saranno uguali ed i loro piani saranno paralleli.

Siano le tre rette AB, CD, EF (fig. 190) non situate nello stesso piano, uguali e parallele; dico che i triangoli ACE, BDF sono uguali fra loro, e i loro piani sono paralleli.

Infatti siccome AB è uguale e parallela a CD, la figura ABDC è un parallelogrammo; dunque il lato AC è uguale e parallelo a BD. Per la stessa ragione i lati AE, BF sono uguali e paralleli, come pure CE, DF; dunque i due triangoli ACE, BDF sono uguali.

In secondo luogo dico che il piano ACE è parallelo al piano BDF; infatti ciò è chiaro dalla proposizione precedente, avendo gli angoli CAE, DBF i loro lati rispettivamente paralleli.

PROPOSIZIONE XVI. — *TEOREMA.*

Se più rette situate comunque nello spazio siano incontrate da piani paralleli, rimarranno tagliate in parti proporzionali.

Le duo rette AB, CD (fig. 191) situate o no nel medesimo piano, siano incontrate dai piani paralleli MN, PQ, RS, la prima nei punti A, E, B, la seconda nei punti C F, D; dico che si avrà

$$AE : EB :: CF : FD.$$

Tirisi AD che incontri il piano PQ in G, e congiunganși AC, EG, GF, BD; le intersezioni EG, BD dei piani paralleli PQ, RS per il piano ABD sono parallele; dunque

$$AE : EB :: AG : GD;$$

similmente le intersezioni AC, GF sono parallele; onde

$$AG : GD :: CF : FD;$$

dunquo, pel rapporto comune AG : GD, si avrà

$$AE : EB :: CF : FD.$$

Quello che si è detto delle duo rette AB, CD, si dirà di quante altre si vogliano, paragonandolo a due a due; intersegate anche da qualsiasi numero di piani paralleli.

PROPOSIZIONE XVII. — *TEOREMA.*

Se in un quadrilatero situato, o non, nel medesimo piano si taglino

i lati opposti proporzionalmente con due rette terminate ad essi lati, queste rette s'incontreranno in un punto ove ciascuna rimarrà divisa in parti proporzionali a quelle dei lati divisi dall'altra.

Sia ABCD (fig. 192) un quadrilatero qualunque situato, o non, nel medesimo piano; siano tagliati i lati opposti proporzionalmente con due rette EF, GH, in modo che si abbia AE : EB : : DF : FC e BG : GC : : AH : HD; dico che le rette EF, GH si taglieranno in punto M in modo che si avrà HM : MG : : AE : EB ed EM : MF : : AH : HD.

Conducasi per AD un piano qualunque $AbHcD$ che non passi per GH; per i punti E, B, C, F conducansi a GH le parallele Ee, Bb, Cc, Ff che incontrino questo piano in e, b, c, f.

Per le parallele Bb, GH, Cc, si avrà bH : Hc : : BG : GC : : AH : HD; dunque i triangoli AHb, DHc sono simili. Si avrà inoltre Ae : eb : : AE : EB e Df : fc : : DF : FC; dunque Ae : eb : : Df : : fc, o, *componendo*, Ae : Df : : Ab : Dc; ma per i triangoli simili AHb, DHc si ha Ab : Dc : : AH : HD; dunque Ae : Df : : AH : HD; d'altra parte i triangoli AHb, cHD, essendo simili, l'angolo HAe=HDf; dunque i triangoli AHe, DHf sono simili; dunque l'angolo AHe=DHf. Ne segue in primo luogo che eHf è una linea retta e che perciò le tre parallele Ee, GH, Ff stanno in uno stesso piano, il quale conterrà le due rette EF, GH; dunque queste debbono tagliarsi in un punto M. Secondamente per le parallele Ee, MH, Ff si avrà EM : MF : : eH : Hf : : AH : HD.

Con una costruzione simile, rapportata al lato AB, si dimostrerebbe che HM : MG : : AE : EB.

Scolio. Si è già veduto (part. I, lib. 3, prop. 17) un caso particolare di questa proposizione, quando si è detto che congiungendo a due a due i punti di mezzo dei lati adiacenti in un quadrilatero, nasce sempre un parallelogrammo. Se si congiungono i punti di divisione dei lati opposti, le due congiungenti, essendo le diagonali di quel parallelogrammo, si taglieranno per metà, come appunto eransi divisi i lati.

PROPOSIZIONE XVIII. — *TEOREMA.*

L'angolo diedro può essere misurato (conforme alla definizione IV) dall'angolo che fanno tra loro le due perpendicolari condotte in ciascuno dei due piani all'intersezione comune in un medesimo suo punto.

L'angolo compreso fra i due piani MAN, MAP (fig. 193) può esser misurato dall'angolo NAP che formano fra loro le due per-

pendicolari AN, AP, condotte dal medesimo punto A alla comune intersezione AM, in ciascuno dei due piani.

Per dimostrare la legittimità di questa misura, bisogna provare:

1.° Che essa è costante, cioè che sarebbe la stessa a qualunque punto dell'intersezione comune si conducessero le perpendicolari.

Se si prende un altro punto M e tirinsi MC nel piano MN ed MB nel piano MP perpendicolari alla comune intersezione AM; poichè MB ed AP sono perpendicolari ad una medesima retta AM, sono parallele fra loro; per la medesima ragione MC è parallela ad AN; dunque l'angolo BMC=PAN (14); dunque è indifferente il condurre le perpendicolari al punto M o al punto A; l'angolo compreso sarà sempre lo stesso.

2.° Bisogna provare che se l'angolo dei due piani aumenta o diminuisce in un certo rapporto, l'angolo PAN aumenterà o diminuirà nel medesimo rapporto.

Nel piano PAN descrivasi col centro A e con un raggio ad arbitrio l'arco NDP; col centro M e col medesimo raggio descrivasi l'arco CEB; tirisi AD comunque. I due piani PAN, BMC, essendo perpendicolari ad una medesima retta MA sono paralleli (12); dunque le intersezioni AD, ME di questi due piani con un terzo AMD saranno parallele; dunque l'angolo BME sarà uguale a PAD.

Ora se l'angolo DAP fosse uguale a DAN è chiaro che l'angolo diedro DAMP sarebbe uguale all'angolo diedro DAMN, perchè la base PAD si situerebbe esattamente sulla sua uguale DAN, l'altezza AM sarebbe sempre la stessa; dunque i due angoli diedri coinciderebbero l'uno con l'altro. Si vede parimente che se l'angolo DAP fosse contenuto un certo numero di volte esattamente nell'angolo PAN, l'angolo diedro DAMP sarebbe contenuto lo stesso numero di volte esattamente nell'angolo diedro DAMN. Da altro canto dal rapporto in numeri interi ad un rapporto qualunque la conclusione è legittima, come s'è già veduto innanzi in circostanze intieramente simili; dunque, qualunque siasi il rapporto dell'angolo DAP all'angolo PAN, l'angolo diedro DAMP sarà in questo medesimo rapporto coll'angolo diedro PAMN; dunque l'an-

golo NAP può esser preso per la misura dell'angolo che fanno fra loro i due piani MAP, MAN.

Scolio. Avviene dunque degli angoli diedri quel medesimo che degli angoli rettilinei. Così dunque le proposizioni dimostrate nel libro I e che riguardano le proprietà circa l'intersezione o il parallelismo delle linee rette, si cangeranno in altrettante proposizioni riguardanti l'intersezione o il parallelismo dei piani. Per esempio, allorchè due piani s'intersegano, gli angoli opposti ai vertici sono uguali fra loro, e gli angoli adiacenti equivalgono insieme a due angoli retti; onde, se un piano è perpendicolare ad un altro, quest'ultimo è perpendicolare al primo. Parimente nell'incontro dei piani paralleli con un terzo piano si avranno le medesime uguaglianze di angoli e le medesime proprietà che nell'incontro di due linee rette parallele con una terza retta.

Quando un piano CA (fig. 194) è perpendicolare ad un altro MN, esso fa i due angoli diedri adiacenti uguali fra loro, perchè questi sono misurati dai due rettilinei DPA, APE che sono retti. È chiaro da ciò che per una retta BC sopra un piano MN non si può elevare che un sol piano CA perpendicolare ad MN.

PROPOSIZIONE XIX. — *TEOREMA.*

Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni piano condotto per questa retta sarà perpendicolare allo stesso piano.

Sia la retta AP (fig. 194) perpendicolare al piano MN; ogni piano APB condotto per AP sarà perpendicolare allo stesso piano MN.

Sia BPC l'intersezione dei piani AB, MN; se nel piano MN si conduce DE perpendicolare a PB, la retta AP, essendo perpendicolare al piano MN, sarà perpendicolare a ciascuna delle due rette BC, DE; ma l'angolo APD, formato dalle due perpendicolari PA, PD all'intersezione comune BP, misura l'angolo dei due piani AB, BN; dunque, poichè quest'angolo è retto, i due piani sono perpendicolari fra loro (def. 5).

Scolio I. Quando tre rette, come AP, BP, DP sono perpendicola-

ri fra loro, ciascuna di queste è perpendicolare al piano delle altre due, ed i tre piani sono perpendicolari fra loro.

II. Per due rette AB, CD (fig. 280) non situate nello stesso piano si ponno far passare sempre due piani paralleli MN, PQ. Infatti da un punto B della prima AB si tirerà BO parallela alla seconda CD, e da un punto D della seconda si tirerà DE parallela ad AB; così i due angoli ABO, CDE, avendo i loro lati rispettivamente paralleli, determinano i due piani MN, PQ paralleli fra loro (14); di più si vede che questi piani sono i soli che si possono condurre nel detto modo.

Questo ci fornisce il mezzo per trovare la minima distanza delle due rette AB, CD non situate nel medesimo piano. Infatti si vede che queste rette non ponno avvicinarsi più che i due piani MN, PQ; onde la minima distanza di questi piani sarà la minima distanza delle rette. Dal punto D si tiri DF perpendicolare al piano PQ; essa sarà pure perpendicolare al piano MN (12), e il piano CDF incontrerà i due piani paralleli nelle due parallele GF, CD, e sarà perpendicolare ad entrambi. Ora se dal punto G si abbassi perpendicolare al piano PQ questa incontrerà in H la retta CD GH parallela a GH, e sarà perpendicolare insieme alle due rette proposte AB, CD; dippiù, essendo perpendicolare ai due piani, è la loro minima distanza; essa è dunque ancora la minima distanza delle due rette proposte.

PROPOSIZIONE XX. — *TEOREMA.*

Se un piano è perpendicolare ad un altro piano, e se in uno di questi piani si tiri una retta perpendicolare alla loro comune intersezione, questa retta sarà perpendicolare all' altro piano.

Sia il piano AB (fig. 194) perpendicolare al piano MN e conducasi nel piano AB la retta PA perpendicolare alla comune intersezione PB; dico essere PA perpendicolare al piano MN.

Infatti se nel piano MN si tira DP perpendicolare a PB, l'angolo APD sarà retto, giacchè i piani sono perpendicolari fra loro; dunque la retta AP è perpendicolare alle due rette PB, PD; dunque essa è perpendicolare al loro piano MN.

Corollario. Se il piano AB è perpendicolare al piano MN e per un punto P dell' intersezione comune si elevi una perpendicolare al piano MN ; dico che questa perpendicolare sarà nel piano AB ; perocchè se non vi stesse, potrebbesi condurre al piano AB una perpendicolare AP alla intersezione comune BP , la quale sarebbe , per quello che s' è or ora dimostrato , perpendicolare al piano MN ; dunque nel medesimo punto P vi sarebbero due perpendicolari al piano MN ; il che è impossibile.

PROPOSIZIONE XXI. — *TEOREMA.*

Se più piani che s' intersegano sono perpendicolari ad uno stesso piano la loro comune intersezione sarà perpendicolare a questo piano.

Imperocchè , se dal punto P (fig. 194) si elevi la perpendicolare al piano MN , questa deve trovarsi ad un tempo, per quello che si è dimostrato nel corollario della proposizione precedente , in ciascuno dei piani paralleli ; essa dunque è la loro comune intersezione AP.

Scolio. Questa proposizione è la reciproca della XIX ; quivi si è supposto che la comune intersezione di più piani sia perpendicolare ad altro piano, e se n' è dedotto che quei piani sono perpendicolari a quel piano ; qui si son supposti perpendicolari i piani , e si è dimostrata perpendicolare la loro comune intersezione.

PROPOSIZIONE XXII. — *TEOREMA.*

In ogni angolo triedro un angolo rettilineo qualunque è minore della somma degli altri due.

Fa mestieri dimostrar solamente la proposizione quando l' angolo rettilineo che si paragona alla somma degli altri due, sia maggiore di ciascuno di questi ultimi , altrimenti la proposizione è evidente. Sia dunque l' angolo triedro S (fig. 195) formato dai tre angoli rettilinei ASB , ASC , BSC , e suppongasi che l'angolo ASB sia il maggiore dei tre ; dico che sarà ASB$<$ASC+BSC.

Facciasi nel piano ASB l'angolo BSD=BSC; tirisi ad arbitrio la retta ADB; e preso SC=SD, tirinsi AC, BC.

I due lati BS, SD sono uguali ai due BS, SC; l'angolo BSD=BSC; dunque i triangoli BSD, BSC sono uguali; dunqne BD=BC. Ma si ha AB<AC+BC; togliendo da una parte BD, dall'altra la sua uguale BC, resterà AD<AC. I due lati AS, SD sono uguali ai due AS, SC, il terzo AD è minore del terzo AC; dunque l'angolo ASD<ASC. Aggiungendo BSD = BSC, si avrà ASD + BSD o sia ASB<ASC+BSC, come bisognava dimostrare.

Corollario. Dunque in ogni angolo triedro uno qualunque degli angoli rettilinei è maggiore della differenza degli altri due. [1]

Scolio. Si noti che avviene dei tre angoli rettilinei che compongono un angolo triedro, quel medesimo che dei tre lati di un triangolo.

PROPOSIZIONE XXIII. — *TEOREMA.*

La somma degli angoli rettilinei che formano un angolo poliedro è sempre minore di quattro angoli retti.

Sia S (fig. 196) un angolo poliedro qualunque; dico che la somma degli angoli rettilinei ASB, BSC, ec. che lo compongono, è minore di quattro angoli retti.

Taglisi l'angolo S con un piano qualunque ABCDE; da un punto O preso in questo piano conducansi a tutti i vertici degli angoli le rette OA, OB, OC, OD, OE.

La somma degli angoli dei triangoli ASB, BSC ec. formati intorno al vertice S, equivale alla somma degli angoli di un ugual numero di triangoli AOB, BOC, ec. formati intorno al vertice O. Ora al punto B ci è un angolo triedro; dunque per la proposizione precedente, ABC ovvero ABO+OBC<ABS+SBC; parimente al punto C si ha BCO+OCD<BCS+SCD; e così rispetto a tutti

[1] Quando tre quantità a, b, c sono tali che una qualunque di esse è minore della somma delle altre due, ne segue che una di esse è maggiore della differenza delle altre due; infatti se si avesse $a<b-c$, o pure $a=b-c$, non sarebbe più, come si suppone, $b>a+c$.

gli altri angoli del poligono ABCDE. Segue da ciò che nei triangoli il cui vertice è in O, la somma degli angoli alla base è minore della somma degli angoli alla base nei triangoli il cui vertice è in S; dunque, per compensazione, la somma degli angoli formati al punto O è maggiore della somma degli angoli intorno al punto S. Ma la somma degli angoli intorno al punto O è uguale a quattro angoli retti; dunque la somma degli angoli rettilinei che formano l'angolo poliedro S è minore di quattro angoli retti.

Scolio I. Questa dimostrazione suppone che l' angolo poliedro sia convesso, ovvero che il piano d' una faccia prolungato non possa mai tagliare l' angolo poliedro; se fosse altrimenti la somma degli angoli rettilinei non avrebbe più limite, e potrebb' essere d' nna grandezza qualunque.

II. A misura che la somma degli angoli rettilinei si approssima a quella di quattro angoli retti, i lati si approssimano a situarsi in un medesimo piano, e quindi l' angolo poliedro divien sempre maggiore. A misura che la detta somma si approssima a zero, i lati si approssimano a confondersi in una sola linea retta, e l'angolo poliedro divien minore.

La grandezza di un angolo poliedro non dipende dal numero degli angoli rettilinei che lo formano, ma sì dalla loro somma.

III. La proposizione presente è la reciproca di quella dimostrata nella geometria piana, che la somma di tutti gli angoli consecutivi formati sopra un piano intorno a un punto è uguale a quattro retti; infatti qui si è dimostrato che se questa somma è uguale a quattro angoli retti, gli angoli stanno su di un medesimo piano; perchè se stessero fuori, la loro somma sarebbe minore di quattro angoli retti, il che si oppone alla supposizione.

PROPOSIZIONE XXIV. — *TEOREMA.*

Se due angoli triedri abbiano i loro angoli rettilinei rispettivamente uguali, gli angoli diedri formati dai piani ove sono gli angoli uguali, saranno uguali.

Sia l'angolo ASC=DTF (fig. 197), l'angolo ASB=DTE e l'an-

golo BSC=ETF; dico che i due piani ASC, ASB formeranno un angolo diedro uguale a quello dei due piani DTF, DTE.

Prendasi SB ad arbitrio, conducasi BO perpendicolare al piano ASC; dal punto O, dove questa perpendicolare incontra il pieno, tirinsi OA, OC perpendicolari sopra SA, SC; uniscansi AB, BC; prendasi poi TE=SB; conducasi EP perpendicolare sul piano DTF; dal punto P si abbassino PD, PF perpendicolari sopra TD, TF; in ultimo si congiungano DE, EF.

Il triangolo SAB è rettangolo in A ed il triangolo TDE in D (7); e poichè l'angolo ASB=DTE, si avrà pure SBA=TED. Da altra parte SB=TE; dunque il triangolo SAB è uguale al triangolo TDE; dunque SA=TD, ed AB=DE. Si dimostrerà similmente che SC=TF e BC=EF. Ciò posto, il quadrilatero SAOC è uguale al quadrilatero TDPF; perocchè, ponendo l'angolo ASC sul suo uguale DTF, per essere SA=TD ed SC=TF, il punto A cadrà in D e il punto C in F. Nel medesimo tempo AO, perpendicolare ad SA, cadrà sopra DP perpendicolare a TD, e parimente OC sopra PF; dunque il punto O cadrà sul punto P, e si avrà AO=DP. Ma i triangoli AOB, DPE sono rettangoli in O e P, l'ipotenusa AB=DE, ed il lato AO=DP; dunque questi triangoli sono uguali; dunque l'angolo OAB=PDE. L'angolo OAB è l'inclinazione dei due piani ASB, ASC; l'angolo PDE è l'inclinazione dei due piani DTE, DTF; dunque i due primi sono ugualmente inclinati che i due secondi.

Fa d'uopo osservare che l'angolo A del triangolo rettangoli OAB non è propriamente l'inclinazione dei due piani ASB, ASC se non quando la perpendicolare BO cade per rapporto ad SA della medesima parte di SC; se cadesse dall'altra parte, l'angolo dei due piani sarebbe ottuso, ed unito all'angolo A del triangolo OAB farebbe due angoli retti. Ma, nel medesimo caso, l'angolo dei due piani TDE, TDF sarebbe parimente ottuso, ed unito all'angolo D del triangolo PDE farebbe due angoli retti; dunque siccome l'angolo A si dimostrerebbe sempre, come or ora s'è fatto, uguale a D, si conchiuderebbe similmente che l'inclinazione dei due piani ASB, ASC è uguale a quella dei due piani TDE, TDF.

Scolio I. Se due angoli triedri hanno i loro angoli rettilinei rispettivamente uguali, e se nel medesimo tempo gli angoli uguali

od omologhi sono *disposti nella stessa maniera* nei due angoli triedri, allora questi angoli triedri saranno uguali, e posto l'uno sull'altro coincideranno. Infatti si è veduto già che il quadrilatero SAOC può esser situato sul suo uguale TDPF; così adattando SA sopra TD, SC cadrà sopra TF ed il punto O sul punto P. Ma per l'uguaglianza dei triangoli AOB, DPE, la OB perpendicore al piano ASC è uguale alla PE perpendicolare al piano TDF; di più queste perpendicolari sono dirette nel medesimo senso; dunque il punto B cadrà sul punto E, la retta SB sopra TE, e i due angoli triedri combaceranno interamente l'uno sull'altro. [1]

Questo combaciamento però non ha luogo se non supponendo che gli angoli rettilinei uguali siano *disposti della stessa maniera* nei due angoli triedri; perchè s'essi angoli rettilinei uguali fossero *disposti in ordine inverso*, o, che torna lo stesso, se le perpendicolari OB, PE in cambio di esser dirette nel medesimo senso per rapporto ai piani ASC, DTF, fossero dirette in sensi contrari, allora sarebbe impossibile la coincidenza dei due angoli triedri. Non sarebbe però men vero, conforme al teorema nel quale non si tieu conto della disposizione degli angoli rettilinei, che i piani nei quali sono gli angoli uguali fossero ugualmente inclinati fra loro; talchè i due angoli triedri sarebbero uguali in tutte le loro parti costituenti senza poter essere soprapposti. Questa sorta d'uguaglianza [2] che non è assoluta o di soprapposizione merita di essere distinta con una particolare denominazione; noi la chiameremo *uguaglianza per simmetria*.

Così i due angoli triedri dei quali trattasi e che son formati da tre angoli rettilinei rispettivamente uguali, ma disposti in un

[1] È quasi superfluo lo avvertire che questo combaciamento degli angoli triedri è una maniera d'esprimersi e che s'intende parlare del combaciamento delle loro facce. L'angolo non è che uo' idea di rapporto e oon puolo una parte dell'estensione: quindi il dire, a rigore di termini, che due angoli combaciano, sarebbe una cosa vuota affatto di senso.

[2] Si noti che qui non si può ancora conchiudere cha gli angoli triedri simmetrici siano uguali in quanto allo spazio angolare, ma solo oelle loro parti costituenti cioè negli angoli rettilinei e negli angoli diedri. L'uguaglianza degli spazi angolari si potrà tenere come dimostrata quando sarà provato in appresso che le due piramidi triangolari simmetriche SABC, TDEF sono equivalenti.

ordine inverso, si chiameranno *angoli uguali per simmetria* o semplicemente angoli *uguali simmetrici.* [1]

La medesima osservazione si applica a un angolo poliedro qualunque; così un angolo poliedro formato dagli angoli rettilinei A, B, C, D, E, ed altro angolo poliedro formato dai medesimi angoli disposti in un ordine inverso A, E, D, C, B possono [2] essere tali che i piani nei quali sono gli angoli uguali siano ugualmente inclinati fra loro. Questi due angoli poliedri che sarebbero uguali senza che fosse possibile la loro sovrapposizione si chiameranno medesimamente *angoli poliedri uguali per simmetria*, od *angoli poliedri simmetrici.*

Nelle figure piane propriamente non vi è uguaglianza per simmetria, e tutte quelle che si volessero chiamar così sarebbero uguaglianze assolute o di soprapposizione. La ragione è che si può capovolgere una figura piana e prendere indifferentemente la parte superiore per la inferiore. Il contrario accade nei solidi, ove la terza dimensione può esser presa in due sensi diversi.

II. Dall' uguaglianza dei tre angoli rettilinei di due angoli triedri, risulta l'uguaglianza dei loro tre angoli diedri, non che di essi angoli triedri, come dall'uguaglianza dei tre lati di un triangolo risulta quella dei loro angoli, e quindi dei triangoli medesimi. In generale di queste sei cose: i tre angoli rettilinei e i tre angoli diedri che formano un angolo triedro, date tre, le altre tre rimangono interamente determinate. Nascono così vari casi dell'uguaglianza degli angoli triedri i quali non si trattano qui perchè, come si vedrà, sono corollari di altre proposizioni che si dimostreranno in appresso. [3]

[1] Questa osservazione dell'uguaglianza per simmetria che ha luogo nelle figure solide è tutta dovuta al Legendre, e prima di lui non ci si era pensato più che tanto. Egli ha così rischiarato grandemente la teorica dei poliedri ch'era innanzi di lui monca ed imperfetta.

[2] Qui è da por mente che il Legendre dice *possono*, perchè potrebbero quei due angoli poliedri non essere nemmeno simmetrici, stante che gli angoli poliedri di più di tre angoli rettilinei non sono determinati dai soli loro angoli rettilinei solamemte, ma anche da un certo numero dei loro angoli diedri, come si vedrà poco appresso.

[3] Intendiamo qui parlare dei triangoli sferici che servono di misura agli an-

PROPOSIZIONE XXV. — *TEOREMA.*

Dati i tre angoli rettilinei che formano un angolo triedro, trovare con una costruzione piana l'angolo che fanno fra loro due delle sue facce.

Sia S (fig. 198) l'angolo triedro proposto nel quale si conoscano i tre angoli rettilinei ASB, ASC, BSC; bisogna trovare con una costruzione piana l'angolo che fanno fra loro due piani di questi angoli.

Prendasi SB ad arbitrio, conducasi BO perpendicare al piano ASC; dal punto O, dove questa perpendicolare incontra il piano, tirinsi OA, OC perpendicolari ad SA, SC; congiungansi AB, BC; l'angolo OAB sarebbe l'angolo richiesto. Trattasi dunque di trovare il medesimo angolo con una costruzione fatta sopra di un piano.

A tal uopo, facciansi sopra un piano gli angoli B'SA, ASC, B''SC uguali agli angoli BSA, ASC, BSC della figura solida; prendansi B'S e B''S uguali ciascuna a BS della figura solida; dai punti B' e B'' si abbassino B'A e B''C perpendicolari sopra SA, SC che s'incontreranno in un punto O, come perpendicolari a due rette che si tagliano. Dal punto A come centro e col raggio AB' descrivasi la semicirconferenza B'*b*E; dal punto O si elevi sopra B'E la perpendicolare O*b* che incontri la circonferenza in *b*; tirisi A*b*; e l'angolo EA*b* dico essere l'inclinazione cercata dei due piani ASC, ASB nell'angolo triedro.

goli triedri che hanno il vertice nel centro della sfera. Dai casi dell'uguaglianza dei triangoli sferici si deducono quelli dell'uguaglianza degli angoli triedri; i quali casi sono simili a quelli che han luogo per l'uguaglianza dei triangoli rettilinei, solamente colla differenza che dati i tre angoli di un triangolo sferico, questo rimane determinato, e però anche date i tre angoli diedri di un angolo triedro questo rimane determinato, il che non avviene dei triangoli rettilinei.

Avvertiremo anche che siccome dalla teorica dell'uguaglianza dei triangoli sferici se ne deduce quella per l'uguaglianza degli angoli triedri, così pure potrebbesi fare al contrario. Allora si ricorrerebbe alla considerazione degli angoli triedri *supplementari.*

Tutto riducesi a dimostrare che il triangolo AO*b* della figura piana è uguale al triangolo AOB della figura solida. Ora i due triangoli B'SA, BSA sono rettangoli in A e gli angoli in S sono uguali; dunque gli angoli in B e B' sono parimente uguali. Ma l' ipotenusa SB' è uguale all' ipotenusa SB; dunque questi triangoli sono uguali; dunque SA della figura piana è uguale ad SA della figura solida, ed anche AB' o la sua uguale A*b* nella figura piana è uguale ad AB nella figura solida. Si dimostrerà similmente che SC è uguale dalle due parti; donde segue che il quadrilatero SAOC è uguale da entrambe le parti, e che quindi AO della figura piana è uguale ad AO della figura solida; dunque nell'una e nell'altra i triangoli rettangoli AO*b*, AOB hanno l' ipotenusa uguale ed un lato uguale; dunque sono uguali e l' angolo EA*b* trovato colla costruzione piana è uguale all' inclinazione dei due piani SAB, SAC dell' angolo triedro.

Qualora il punto O cada fra A e B' nella figura piana, l' angolo EA*b* diventa ottuso e misura sempre la vera inclinazione dei piani; perciò l' inclinazione richiesta si è indicata con EA*b* e non con OA*b*, affinchè la medesima costruzione convenga a tutti i casi senza eccezione.

Scolio. Si sa già dalle prop. XXII e XXIII che per formare un angolo triedro con tre angoli rettilinei dati, fa d' uopo dapprima che la loro somma sia minore di quattro angoli retti, e di più che uno di essi, comunque preso, sia minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza. Or questo meglio si conferma dalla osservazione della presente figura. Presi che sieno ad arbitrio due angoli B'SA, ASC, è palese dalla costruzione fatta che il terzo CSB' dev' esser tale che la perpendicolare B''S al lato SC incontri il diametro B'E fra le sue estremità B' ed E. Così i limiti della grandezza dell'angolo CSB'' sono quelli che fanno terminar la perpendicolare B''O ai punti B' ed E. Da questi punti si abbassino sopra SC le perpendicolari B'I, EK che incontrino in I e K la circonferenza descritta col raggio SB''; e i limiti dell' angolo CSB'' saranno CSI e CSK.

Ma nel triangolo isoscele B'SI, la retta CS prolungata essendo perpendicolare alla base B'I, si ha l' angolo CSI=CSB'=ASC+ASB'. E nel triangolo isoscele ESK, essendo la retta SC perpen-

dicolare ad EK, si ha l'angolo CSK=CSE. D'altra parte per i triangoli uguali ASE, ASB', l'angolo ASE=ASB'; dunque CSE, ovvero CSK=ASC—ASB'.

Risulta da ciò che il problema sarà possibile sempre che il terzo angolo CSB'' sarà minore della somma degli altri due ASC, ASB e maggiore della loro differenza, come già era noto per le citate proposizioni.

PROPOSIZIONE XXVI. — *PROBLEMA.*

Essendo dati due degli angoli rettilinei che formano un angolo triedro, coll' angolo che i loro piani fanno tra loro, trovare il terzo angolo rettilineo.

Siano ASC, ASB' (fig. 198) i due angoli rettilinei dati, e suppongasi che CSB'' sia il terzo angolo che si cerca; allora, facendo la medesima costruzione della proposizione precedente, l'angolo compreso tra due primi sarebbe EA*b*. Ora nello stesso modo che si determina l'angolo EA*b* col mezzo di CSB'', essendo dati gli altri due, così si può determinare CSB'' col mezzo di EA*b*; il che risolverà il problema proposto.

Preso SB' ad arbitrio, si abbassi sopra SA la perpendicolare indefinita B'E; facciasi l'angolo EA*b* uguale all'angolo dei due piani dati; dal punto *b*, ove il lato A*b* incontra la circonferenza descritta col centro A e col raggio AB', si abbassi sopra SC la perpendicolare indefinita OCB'' che si terminerà in B'' di modo che SB''=SB'; l'angolo CSB'' sarà il terzo angolo rettilineo cercato.

Infatti, se si forma un angolo triedro cogli angoli rettilinei B'SA, ASC, CSB'', l'inclinazione dei piani, ove sono gli angoli dati ASB', ASC sarà uguale all' angolo dato EA*b*.

Corollario. Si ricava da ciò che se due angoli triedri hanno due angoli rettilinei rispettivamente uguali, e le inclinazioni dei piani di questi angoli uguali, il terzo angolo rettilineo sarà uguale al terzo, e i due rimanenti angoli triedri rispettivamente uguali.

Scolio. In un angolo *tetraedro*, cioè formato da quattro angoli rettilinei ASB, BSC, CSD, DSA (fig. 199), la conoscenza di questi

angoli non basta per determinare le inclinazioni scambievoli dei loro piani; poichè coi medesimi angoli rettilinei si potrebbero formare un infinità di angoli tetraedri, dando arbitrarie inclinazioni alle facce. Ma se aggiungasi una condizione, per esempio, se sia data l'inclinazione dei due piani ASB, BSC, allora l'angolo tetraedro è interamente determinato, e si potrà trovare l'inclinazione di due qualunque delle sue facce. S'immagini infatti un angolo triedro formato dagli angoli rettilinei ASB, BSC, ASC; i due primi angoli sono dati come pure l'angolo diedro formato dai loro piani; si potrà dunque determinare, mediante il problema, che si è or ora risoluto, il terzo angolo ASC. Indi, se si considera l'angolo triedro formato dagli angoli rettilinei ASC, ASD, DSC; questi tre angoli sono conosciuti; dunque l'angolo triedro è interamente determinato. Ma l'angolo tetraedro è formato dalla riunione dei due triederi di cui è parola; dunque poichè questi angoli parziali sono noti e determinati; l'angolo totale sarà parimente noto e determinato.

L'angolo diedro dei due piani ASD, DSC si troverebbe immediatamente per mezzo del secondo angolo triedro. In quanto a quello dei due piani BSC, CSD bisognerebbe in uno dei due angoli triedri cercare l'angolo compreso dai due piani ASC, BSC; la somma di questi due angoli formerebbe l'angolo diedro dei due piani BSC, DSC.

Si troverà nello stesso modo che per determinare un angolo *pentaedro*, cioè composto di cinque angoli rettilinei, oltre i cinque angoli piani che lo compongono, bisognerà conoscere due dei suoi angoli diedri; ne bisognerebbero tre per l'angolo *esaedro*; e così di seguito. [1]

[1] In generale gli angoli rettilinei e gli angoli diedri hanno in un angolo poliedro le medesime relazioni che hanno in un poligono i lati e gli angoli; cioè se n e il numero degli angoli rettilinei, e quindi pure n quello degli angoli diedri, fra gli uni e gli altri bisognerà darne $2n-3$ per determinare interamente l'angolo poliedro.

NOTA

Abbiamo accennato a carte 197 che l'angolo d'inclinazione di una retta su un piano è il minimo di tutti quelli che si possano formare con questa retta e con un' altra tirata dal suo piede sul piano; e di più che l'angolo adiacente di questa inclinazione è il massimo. A non lasciare senza dimostrazione questa verità, riporteremo qui due proposizioni tratte dalla Geometria solida del Caravelli, libro, comechè poco elegante e perfetto, tuttavia pregevole per alcune cose belle e importanti; e ammirevole perchè surto prima che la cieca e stupida osservanza di Euclide fosse abbattuta dagli stupendi lavori dei geometri moderni.

Teorema. *Se da un punto A* (fig. 276) *preso fuori del piano LM si abbassino su questo piano l'obbliqua AO e la perpendicolare AB, e nel medesimo piano descrivasi col centro O, e con qualunque intervallo OC il cerchio CDEF; tirata la retta OB* e *prolungata in C ed E; dico* 1° *che di tutte le infinite rette che da A si possono tirare agl'infiniti punti della periferia CDEF, AC è la minima;* 2° *AE la massima;* 3° *delle altre la più vicina alla minima è minore che la più distante;* 4° *che ognuna diversa da AC ed AE non può averne che un'altra sola uguale.*

1°. Essendo OB+BG>OG ed OG=OC, sarà OB+BG>OC, e tolto di comune OB, sarà BG>BC; dunque si avrà $\overline{AB}^2+\overline{BG}^2>\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$, o, a cagione dei triangoli rettangoli ABG, ABC, $\overline{AG}^2>\overline{AC}^2$, e quindi AG>AC.

2.° Essendo BO+OH ovvero BE>HB, si avrà $\overline{AB}^2+\overline{BE}^2$ ovvero $\overline{AE}^2>\overline{AB}^2+\overline{BH}^2$ ovvero $\overline{AH}^2$, dunque AE>AH.

3.° Siccome si è dimostrato BG minore del raggio e BH maggiore, sarà BG<BH. dunque, a cagione dei triangoli rettangoli, se ne inferirà, come prima, AG<AH.

4.° Parimente, supposto BH=BI, se ne dedurrà AH=AI. Ora ogni altra retta tirata dal punto A alla circonferenza, sarebbe o più vicina o più lontana dalla minima che queste due; dunque ne sarebbe, come si è dimostrato o maggiore o minore; e così è chiaro che ognuna di queste rette ne ha un'altra sola uguale.

Corollario. Essendo BH = BI sarà l'angolo BOH=BOI; onde son pure uguali gli archi CH, CI. Dunque uguali sono le rette AH, AI che incontrano la periferia in punti ugualmente distanti dal punto C.

Teorema. *Stando le medesime cose della prop. prec., sia DF perpendicolare ad EC; di tutti gl' infiniti angoli che si possono formare coll' obbliqua AO e cogl'infiniti raggi; dico 1° che l'angolo AOD è retto; 2° che l'angolo AOG è acuto e tanto più acuto quanto più DG s'avvicina ad OC; 3° che l'angolo AOH è ottuso e tanto più ottuso quanto più OH s'avvicina ad OE; 4° che l'angolo AOC è il minimo di tutti, ed AOE il massimo; 5° che ognuno dei detti angoli, diverso da AOC, AOE non può averne che un solo uguale.*

1.° Si congiungano AD, AF; essendo i punti D ed F ugualmente distanti da C sarà AD=AF; dunque AOD, AOF sono uguali; e però retti (prop. 13, lib. 1, part. 1).

2.° Avendo i triangoli AOG, AOD il lato AG minore di AD (prop. prec.) e gli altri lati rispettivamente uguali, sarà l'angolo AOG<AOD (prop. 11, lib. 1, part. 1). In oltre divenendo AG tanto più piccola, quanto più il punto G s'avvicina al punto C; sarà l'angolo AOG più acuto quanto più OG s'avvicinerà ad OC.

3.° Parimente, essendo AH>AD (prop. prec.) se ne conchiuderà che l'angolo ABH è ottuso, e tanto più ottuso quanto più OH s'avvicina ad OE.

4.° Essendo AC la minima ed AE la massima di tutte queste rette, sarà l'angolo AOC il minimo, e l'aogolo AOE il massimo di tutti i detti angoli.

5.° Essendo AH=AI, sarà l'angolo AOH=AOI, e siccome ogni altra di queste rette sarebbe disuguale a queste due, così ognuno degli angoli di cui si tratta non ne ha tra essi che un solo uguale.

LIBRO II

I POLIEDRI.

DEFINIZIONI.

I. Si chiama *solido poliedro* o semplicemente *poliedro* ogni solido terminato da più piani. Questi piani si chiamano *facce* del poliedro; e sono necessariamente terminati da linee rette, nelle quali s' intersegano a due a due, e che si chiamano *lati* o *costole* del poliedro.

I poliedri si distinguono dal numero delle loro facce. Il più semplice è quello di quattro facce; perchè ci abbisognano almeno tre piani per formare un angolo triedro, e questi tre piani lasciano un vuoto che per esser chiuso, richiede almeno un altro piano. Il poliedro di quattro facce dicesi *tetraedro; pentaedro* quello di cinque; *esaedro* quello di sei; *ettaedro* quello di sette; *ottaedro* quello di otto; e così di seguito, ponendo dopo le parole che servono in greco ad enunciare i numeri la terminazione *edro*, proveniente anche dal greco e che significa *base*.

II. Dicesi *poliedro regolare* quello le cui facce sono tutti poligoni regolari uguali ed i cui angoli poliedri sono tutti uguali fra loro. Questi poliedri sono in numero di cinque. (Vedi l'appendice ai libri II e III).

III. Il *prisma* è un poliedro compreso da più piani parallelogrammi, terminati da una parte e dall'altra da due piani poligoni uguali e paralleli.

Per costruire qnesto poliedro, sia ABCDE (fig. 200) un poligono qualunque, se in un piano parallelo ad ABC si tirino le rette FG, GH, HI, IK, KF uguali e parallele ai lati AB, BC, CD, DE,

EA il che formerà il poligono FGHIK uguale ad ABCDE; se in seguito si congiungano da un piano all'altro i vertici degli angoli con le rette AF, BG, GH, DI, EK, le facce ABGF, BGHC, HCDI, IDEK, KEAF saranno parallelogrammi, ed il poliedro così costruito sarà un prisma.

IV. I poligoni e paralleli ABCDE, FGHIK si chiamano *le basi* del prisma; gli altri piani parallelogrammi, presi insieme, costituiscono la *superficie laterale o convessa* del prisma.

V. L'*altezza del prisma* è la distanza delle due sue basi, o la perpendicolare abbassata da un punto della base superiore sopra il piano della base inferiore.

VI. Un prisma è *retto* quando i suoi lati AF, BG, CH, DI, EK sono perpendicolari ai piani delle basi; allora ciascuno di essi è uguale all' altezza del prisma. In qualunque altro caso il prisma è *obbliquo* e l'altezza è minore del lato.

VII. Un prisma è *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagonale*, *esagonale* ec., secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, un esagono ec.

VIII. Il prisma che ha per base un parallelogrammo, ha tutte le sue facce parallelogrammiche; e si chiama *parallelepippedo*. (fig. 206).

Il parallelepippedo è *rettangolo* quanto tutte le sue facce sono rettangoli.

IX. Fra i parallelepippedi rettangoli si distingue il *cubo* compreso da sei quadrati uguali. Questo è l'esaedro regolare.

X. La *piramide* è quel poliedro che formano più piani triangolari che partendo da un punto S (fig. 196) vanno a terminare ai differenti lati di un medesimo poligono ABCDE.

Il poligono ABCDE si chiama la *base* della piramide, il punto S dicesi il *vertice*, e il complesso dei triangoli ASB, BSC, DSE, ESA forma la *superficie convessa* o *laterale* della piramide.

XI. L'*altezza* della piramide è la perpendicolare abbassata dal vertice sopra il piano della base, prolungato se sia necessario.

XII. La piramide è *triangolare*, *quadrangolare*, ec., secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, ec. La piramide triangolare è un tetraedro, cioè il più semplice de' poliedri; onde le due espressioni: *tetraedro* e *piramide triangolare* sono sinonime.

Il tetraedro è nello spazio quello che il triangolo è nel piano. Infatti il triangolo nasce dal fissare la posizione di un punto sopra un piano legandolo a due altri punti di questo piano; e similmente il tetraedro ha luogo quando si fissa la posizione di un punto nello spazio, legandolo a tre altri punti di esso spazio.

XIII. Una piramide è *regolare*, allorchè la base è un poligono regolare, e nello stesso tempo la perpendicolare abbassata dal vertice sopra il piano della base e passa pel centro di questa base; questa retta chiamasi allora l'*asse* della piramide.

Nella piramide regolare tutti i triangoli che formano la sua superficie convessa sono isosceli ed uguali fra loro, perchè le basi sono uguali, come lati di un poligono regolare, e gli altri lati sono obbliqui uguali, perchè ugualmente distanti dalla perpendicolare.

XIV. *Diagonale di un poliedro* è la retta che conginnge i vertici di due angoli poliedri non adiacenti.

XV. Diconsi *poliedri simmetrici* due poliedri che, avendo nna base comune, sono costruiti uno al di sopra del piano di questa base, l'altro al di sotto, con questa condizione, che i vertici dei loro angoli poliedri si trovino ad ugual distanza dal piano della base e sopra una medesima retta perpendicolare a questo piano. Gli angoli che così corrispondono si chiamano angoli omologhi.

Per esempio, se la retta ST (fig. 202) è perpendicolare al piano ABC, e al punto O ov' essa incontra questo piano, sia divisa in due parti uguali, le due piramidi SABC, TABC che hanno la base comune ABC saranno due poliedri simmetrici.

XVI. Due tetraedri sono *simili* quando hanno due facce simili rispettivamente, similmente disposte ed ugualmente inclinate fra loro.

Così supponendo gli angoli ABC=DEF (fig. 203), BAC=EDF, ABS=DET, BAS=EDT, se inoltre l' inclinazione dei piani ABS, ABC è uguale a quella dei loro omologhi DET, DEF, i tetraedri SABC, TDEF saranno simili.

XVII. Avendo formato un triangolo unendo i vertici di tre angoli presi sopra una medesima faccia di un poliedro, si può immaginare che i vertici dei differenti angoli poliedri del poliedro, situati fuori del piano di questa base, siano quelli di altrettanti

tetraedri che hanno per base comune il triangolo indicato; e ciascuno di questi tetraedri determinerà la posizione di ciascun angolo poliedro per rapporto alla base. Ciò posto:

Due poliedri sono *simili* allorchè avendo basi simili i vertici degli angoli poliedri omologhi sono determinati da tetraedri rispettivamente simili.

XVIII. Diconsi *vertici* di un poliedro i punti situati ai vertici dei suoi differenti angoli poliedri.

N. B. Tutti i poliedri che noi considereremo sono poliedri ad angoli salienti, o *poliedri convessi*. Chiamiamo così quelli la cui superficie non può essere incontrata da una linea retta in più di due punti. In questo poliedro il piano prolungato di una faccia non può incontrare il solido; è dunque impossibile che il poliedro sia parte al di sopra del piano di una faccia, parte al di sotto; esso è tutto intero da una medesima parte di un tal piano.

Un poliedro ad angoli rientranti è sempre la differenza di due poliedri convessi; laonde conoscendo tutte le parti di questi ultimi, si conosceranno altresì quelle del poliedro ad angoli rientranti. Così la considerazione dei soli poliedri convessi non esclude quella dei poliedri ad angoli rientranti.

PROPOSIZIONE PRIMA. — *TEOREMA.*

Due poliedri non possono avere i medesimi vertici e nel medesimo numero senza coincidere l' uno con l' altro.

Infatti, suppongasi uno dei poliedri già costruito; se si vuole costruirne un altro, che abbia i medesimi vertici, cioè ugualmente situati fra loro, e nello stesso numero, bisognerà che i piani di quest' ultimo non passino tutti pei medesimi punti che nel primo, altrimenti non differirebbero l' uno dall' altro; ma allora è chiaro che alcuno dei nuovi piani taglierebbe il primo poliedro; vi sarebbero dei vertici al di sopra di questi piani e dei vertici al di sotto, il che è contro la natura dei poliedri convessi; dunque se due poliedri hanno i medesimi vertici e nello stesso numero, debbono necessariamente combaciare l' uno con l' altro.

Scolio. Dati di posizione i punti A, B, C, K, ec. (fig. 204) che debbono essere i vertici di un poliedro, è facile descrivere il poliedro.

Si prenderanno primamente tre punti D, E, H tali che il piano DEH, passi, ove questo abbia luogo, per altri punti come K, C, ma lasci tutti gli altri da una medesima parte, cioè tutti al di sopra del piano o tutti al di sotto; il piano DEH, o DEHKC così determinato sarà una faccia del poliedro. Per uno dei suoi lati EH si menerà un piano che si farà girare fino a che incontri un nuovo vertice F, o più insieme F, I; si avrà una seconda faccia che sarà FEH, o FEHI. Si continuerà così facendo passare altri piani pei lati trovati fino a che il solido sia terminato da tutte le parti; questo solido sarà il poliedro richiesto, perocchè non ce n'hanno due che possano passare pei medesimi vertici.

Insomma il dare di numero e di posizione i vertici di un poliedro importa determinare questo poliedro in tutte le sue parti. Lo stesso avverrebbe di un poligono quando si assegnassero tutti i suoi vertici sopra di un piano; la maniera di costruirlo sarebbe analoga, cioè si congiungerebbero quei punti a due a due, in modo però che tutti gli altri punti restassero sempre da una stessa parte di ciascuna congiungente.

PROPOSIZIONE II. — *TEOREMA.*

In due poliedri simmetrici le facce omologhe sono rispettivamente uguali, come pure gli angoli diedri omologhi.

Sia ABCDE (fig. 205) la base comune ai due poliedri, siano M ed N i vertici di due angoli poliedri qualunque di uno dei poliedri, M' ed N' i vertici omologhi dell'altro; bisognerà, per la definizione, che le rette MM', NN' siano perpendicolari al piano ABC, e che siano divise in due parti uguali ai punti m ed n, ove incontrano questo piano. Ciò posto, dico che la distanza MN è uguale ad M'N'.

Infatti, se si fa girare il trapezio $mM'N'n$ intorno ad mn finchè il suo piano si applichi al piano $mMNn$, a cagione degli angoli retti in m ed in n, il lato mM' cadrà sul suo uguale mM, ed nN' sopra nN; dunque i due trapezi combaceranno, e si avrà $MN = M'N'$. Dunque *due vertici dell' un poliedro sono ugualmente distanti che i due omologhi dell' altro.*

Sia P un terzo vertice del poliedro superiore, e P′ il suo omologo nell'altro; si avrà ancora MP=M′P′, ed NP=N′P′; dunque *il triangolo* MNP *che congiunge tre vertici qualunque del poliedro superiore è uguale al triangolo* M′N′P′ *che unisce i tre vertici omologhi dell'altro poliedro.*

Se tra tutti i triangoli che nascono congiungendo a tre a tre i vertici dei due poliedri, si considerano solamente quelli che sono formati alla superficie dei poliedri, si può conchiudere che le superficie dei poliedri sono composte di un medesimo numero di triangoli uguali rispettivamente.

Dico ora che se alcuni di questi triangoli sono in un medesimo piano sopra una superficie e formano una medesima faccia poligona, i triangoli omologhi saranno in un medesimo piano sopra l'altra superficie e formeranno una faccia poligona uguale.

Infatti, siano MPN, NPQ due triangoli adiacenti che si suppongono in uno stesso piano, e siano M′P′N′, N′P′Q′ i loro omologhi. Si ha l'angolo MNP=M′N′P′, l'angolo PNQ=P′N′Q′; e se si congiungano MQ ed M′Q′, il triangolo MNQ sarebbe uguale ad M′N′Q′; così si avrebbe l'angolo MNQ=M′N′Q′. Ma poichè MPMQ è un solo piano, si ha l'angolo MNQ=MNP+PNQ; dunque si avrà pure M′N′Q′=M′N′P′+P′N′Q′. Ora se i tre piani M′N′P′, P′N′Q′, M′N′Q′ non fossero in un sol piano, questi tre piani formerebbero un angolo triedro, o si avrebbe (22,1) l'angolo M′N′Q′<M′N′P′ +P′N′Q′; dunque, poichè questa condizione non ha luogo, i due triangoli M′N′P′, P′N′Q′ sono in un medesimo piano.

Da ciò segue che ciascuna faccia, sia triangolare, sia poligona, in un poliedro corrisponde ad una faccia uguale nell'altro, e che perciò i due poliedri sono compresi da un medesimo numero di piani rispettivamente uguali.

Resta a dimostrare che un angolo diedro in uno dei poliedri è uguale a quello delle due facce omologhe nell'altro.

Siano MNP, NPQ due triangoli formati sulla costola comune NP nei piani di due facce adiacenti; siano M′N′P′, N′P′Q′ i loro omologhi; si può concepire in N un angolo triedro formato dagli angoli rettilinei MNQ, MNP, PNQ ed in N′ un angoli triedro formato dai tre M′N′Q′, M′N′P′, P′N′Q′. Ora abbiam provato già che questi angoli rettilinei sono rispettivamente uguali; dunque l'in-

clinazione dei piani MNP, PNQ è uguale a quella dei loro omologhi M'N'Q', P'N'Q' (24, 1).

Scolio. Si noti che *gli angoli poliedri di un poliedro sono i simmetrici degli angoli poliedri omologhi nel poliedro simmetrico*, infatti, se l'angolo poliedro N è formato dai rettilinei MNP, PNQ, QNR, ec., il suo omologo N' è formato dai piani M'N'P', P'N'Q', Q'N'R', ec. Questi sembrano disposti nel medesimo ordine degli altri; ma siccome i due angoli poliedri sono in una situazione inversa l'uno per rispetto all'altro, ne segue che la disposiziono reale dei piani cbo formano l'angolo poliedro N' è l'inversa di quella che ha luogo nell'angolo omologo N. D'altra parte le inclinazioni dei piani consecutivi sono uguali nell'uno e nell'altro angolo solidò; dunque questi angoli sono simmetrici l'uno dell'altro.

Questa osservazione ci dimostra che *un poliedro qualunque non può avere che un sol poliedro simmetrico.* Perocchè se si costruisse sopra un'altra base un nuovo poliedro simmetrico al poliedro dato, gli angoli poliedri di questo sarebbero sempre simmetrici agli angoli del poliedro dato; dunque sarebbero uguali a quelli del poliedro simmetrico costruito sulla prima base. Da altro canto le facce omologhe sarebbero sempre uguali; dunque questi due poliedri simmetrici costruiti sopra una base o sopra un'altra avrebbero le facce uguali e gli angoli poliedri uguali; essi dunque coinciderebbero mediante la sovrapposizione e non formerebbero che un solo e medesimo poliedro.

PROPOSIZIONE III. — *TEOREMA.*

Due prismi sono uguali allorchè hanno un angolo triedro compreso fra tre piani rispettivamente uguali e similmente disposti.

Primieramonte si noti cbo tutti gli angoli poliedri dol prisma, sono diedri e formati ai vertici delle due basi; ora se sia la base ABCDE (fig. 200) uguale alla base *abcde* il parallelogrammo ABGF uguale al parallelogrammo *abgf* e il parallelogrammo

BCHG uguale *bchg*; dico che il prisma ABCI sarà uguale al prisma *abci*.

Si situi la base ABCDE, sulla sua uguale *abcde*, queste due basi coincideranno; ma i tre angoli rettilinei che formano l'angolo poliedro B sono rispettivamente uguali ai tre che formano l'angolo poliedro *b*, cioè ABC=*abc*, ABG=*abg*, GBC=*gbc*; di più questi angoli sono similmente disposti; dunque gli angoli poliedri B, e *b* sono uguali e possono combaciare; per conseguenza il lato BG cadrà sul suo uguale *bg*. Si vede pure che, per i parallelogrammi uguali ABGF, *abgf*, il lato GF cadrà sul suo uguale *gf* e similmente GH sopra *gh*; dunque la base superiore FGHIK coinciderà intieramente colla sua uguale *fghik*, e i due prismi ne formeranno un solo, perchè hanno i medesimi vertici (1).

Corollario. Due prismi retti che hanno basi uguali ed altezza uguale, sono uguali. Infatti avendo il lato AB uguale ad *ab*, e l'altezza BG uguale a *bg*, il rettangolo ABGF sarà uguale al rettangolo *abgf*; il simile avverrà dei rettangoli BGHC, *bghc*; così i tre piani che formano l'angolo triedro B sono uguali ai tre piani che formano l'angolo triedro *b*. Dunque i due prismi sono uguali.

PROPOSIZIONE IV. — *TEOREMA.*

In un parallelepippedo i piani opposti sono uguali e paralleli, e reciprocamente un poliedro compreso da sei piani paralleli a due a due, è un parallelepippedo.

1.° Secondo la definizione del parallelepipedo, le basi ABCD, EFGH (fig. 206), sono parallelogrammi uguali, e i loro lati sono paralleli; rimane dunque a dimostrare che lo stesso avviene per le altre facce opposte, come AEHD, BFGC. Ora, AD è uguale e parallela a BC, poichè la figura ABCD è un parallelogrammo; per simile ragione AE è uguale e parallela a BF; dunque l'angolo DAE è uguale a CBF (14, 1), e il piano DAE parallelo a CBF; dunque anche il parallelogrammo DAEH è uguale al parallelogrammo CBFG. Si dimostrerà similmente che i parollelogrammi opposti ABFE, DCGH sono uguali e paralleli.

2.° Reciprocamente, se si suppone che i piani siano paralleli a due a due, essendo i due EFGH, ABCD intersegati dal terzo ABFE, le intersezioni EF, AB sono parallele; così pure si dimostrerà AE parallela a BF; dunque ABFE è un parallelogrammo. Lo stesso si proverà delle altre facce; dunque un poliedro compreso da sei piani paralleli, a due a due è un parallelepippedo.

Corollario. Poichè il parallelepippedo è un solido compreso da sei piani, dei quali gli opposti sono uguali e paralleli, ne segue che una faccia qualunque e la sua opposta possono esser prese per le basi del parallelepippedo.

Scolio. Date tre rette AB, AE, AD le quali passino per un medesimo punto A e facciano fra loro angoli determinati, si può su queste tre rette costruire un parallelepippedo; per far ciò, bisogna condurre dall'estremità di ciascuna retta un piano parallelo al piano delle altre due; cioè pel punto B un piano parallelo a DAE, pel punto D un piano parallelo a BAE, e pel punto E un piano parallelo a BAD. Gli scambievoli incontri di questi piani formeranno il parallelepippedo cercato.

Questa costruzione è analoga a quella onde si costruisce un parallelogrammo su due rette che s'incontrano con un determinato angolo, perchè, come si sa, bisogna tirare dall'estremità di ciascuna retta una retta parallela all' altra. E qui cade in acconcio di osservare che il parallelepippedo nello spazio corrisponde al parallelogrammo in un piano; poichè come questo è un piano racchiuso da quattro rette parallele a due a due, così quello è uno spazio racchiuso da sei piani paralleli a due a due. La proposizione presente ci mostra già alcune proprietà del parallelepippedo analoghe a quelle del parallelogrammo; ma se ne vedranno ancora altre nelle proposizioni che seguono. E come per misurare le aie dei poligoni, si è incomincato da quella del rettangolo, così s'incomincerà dal volume dal parallelepippedo rettangolo per misurare i volumi dei poliedri. Il lettore vedrà che la successione dei ragionamenti che si verran facendo, saranno al tutto analoghi a quelli fatti nel libro III della geometria piana.

PROPOSIZIONE V. — *TEOREMA.*

In ogni parallelepippedo gli angoli triedri opposti sono simmetrici l' uno dell' altro ; e le diagonali condotte dai vertici di questi angoli si tagliano scambievolmente in due parti uguali.

Paragoniamo, per esempio, l'angolo triedro A (fig. 206) al suo opposto G; l'angolo EAB uguale ad EFB è pure uguale ad HGC, l'angolo DAE=DHE=CGF, e l'angolo DAB=DCB=HGF; dunque i tre angoli rettilinei che formano l'angolo triedro A sono rispettivamente uguali ai tre che formano l'angolo triedro G; d'altra parte è facile vedere che la loro disposizione è inversa nell'uno e nell'altro; dunque 1° i due angoli triedri opposti A e G sono simmetrici l'uno dell'altro.

In secondo luogo, immaginiamo due diagonali EC, AG condotto l'una e l'altra da vertici opposti; poichè AE è uguale è parallela a CG, la figura AEGC è un parallelogrammo; dunque le diagonali EC, AG si tagliano scambievolmente in due parti uguali. Si dimostrerà parimente che la diagonale EC ed un' altra DF si taglieranno anche in due parti uguali; dunque 2° le quattro diagonali si tagliano scambievolmente in due parti uguali in uno stesso punto che può riguardarsi come il centro del parallelepippedo.

PROPOSIZIONE VI. — *TEOREMA.*

Il piano che passa per due costole opposte di un parallelepippedo, lo divide in due prismi triangolari simmetrici l' uno dell' altro.

Per le due costole opposte, cioè non appartenenti alla medesima faccia, BF, DH (fig. 207) passi il piano BDHF; dico che questo divide il parallelepippedo AG nei due prismi triangolari ABDHEF, GHFBCD, simmetrici l' uno dell'altro.

Da prima questi due poliedri sono prismi; perchè i triangoli

ABD, EFH, avendo i loro lati uguali e paralleli, sono uguali, e nel medesimo tempo le facce laterali ABFE, ADHE, BDHF, sono parallelogrammi; dunque il poliedro ABDHEF è un prisma; il simile si dica del poliedro GHFBCD. Dico ora che questi due prismi sono simmetrici l' uno dell' altro.

Sulla base ABD s' immagini fatto il prisma ABDE'F'H' che sia il simmetrico del prisma ABDEFH. Secondo quello ch' è stato dimostrato (2) il piano ABF'E' è uguale ad ABFE, e il piano ADH'E' è uguale a ADHE; ma se si paragona il prisma GHFBCD al prisma ABDH'E'F', la base GHF è uguale ad ABD; il parallelogrammo GHDC, ch' è uguale ad ABFE, è uguale anche ad ABF'E', e il parallelogrammo GFBC, ch' è uguale ad ADHE, è anche uguale ad ADH'E'; dunque i tre piani che formano l' angolo triedro G nel prisma GHFBCD sono rispettivamente uguali ai tre piani che formano l' angolo triedro A nel prisma ABDH'E'F'; d' altra parte essi sono similmente disposti; dunque questi due prismi sono uguali (3), e possono essere sovrapposti. Ma l' un d' essi ABDE'H'F' è simmetrico del prisma ABDHEF; dunque l'altro GHFBCD è anche il simmetrico di ABDHEF. [1]

[1] Il combaciamento dei due prismi ABDHEF, GHFBCD non può aver luogo quando il parallelepippedo sia obbliquo; perchè se si faccia combaciare la base ADB colla sua uguale DBC si vedrà che questi due prismi saranno inclinati da due parti opposte su queste basi; essi tuttavia come si vedrà nella proposizione VIII sono equivalenti, e si è veduto già nella proposizione II che sono uguali in tutte le altre loro parti; laonde è unicamente per questa diversa inclinazione che non possono combaciare. Ma quando il parallelepippedo sia retto, questa simmetria è distrutta, perchè non ci hanno diverse inclinazioni, e i due prismi combaciano; questo si accorda colla prop. III per la quale questi due prismi retti avendo basi uguali ed altezze uguali, presentano le condizioni sufficienti per coincidere.

Qui, per dare una precisa idea dei poliedri simmetrici, vogliamo avvertire, che mettendo un poliedro dinanzi a uno specchio piano, l' immagine che se ne vedrà in questo specchio sarà appunto il poliedro simmetrico. Se s'intenda congiunto un punto qualunque del poliedro coll' immagine di questo punto, la congiungente sarà perpendicolare alla superficie dello specchio; onde, siccome un poliedro è determinato quando siano assegnati di numero e di posizione i suoi vertici, così il Legendre ha definito i poliedri simmetrici determinando la relativa posizione dei loro vertici. Ha poi supposto per maggiore semplicità che i due poliedri avessero una base di comune; per esempio se si suppone che la superficie dello specchio sia la base ADB, allora il prisma ADBE'H'F' sarà l' immagine del

PROPOSIZIONE VII. — *LEMMA.*

Le sezioni fatte in un prisma da piani paralleli, sono poligoni uguali.

Interseghino il prisma ABCI (fig. 201) due piani paralleli; dico che le intersezioni NOPQR, STVXY sono due poligoni uguali.

Perocchè i lati NO, ST sono paralleli, per essere le intersezioni di due piani paralleli con un terzo piano AGF; questi stessi lati NO, ST sono compresi fra le parallele NS, OT che sono lati del prisma; dunque NO è uguale ad ST. Per una simile ragione i lati OP, PQ, QR, ec. della sezione NOPQR, sono rispettivamente uguali ai lati TV, VX, XY, ec. della sezione STVXY. D'altra parte i lati uguali essendo in pari tempo paralleli, ne segue che gli angoli NOP, OPQ, ec. della prima sezione sono rispettivamente uguali agli angoli STV, TVX, ec. della seconda. Dunque le due sezioni NOPQR, STVXY sono poligoni uguali.

Corollario. Ogni sezione fatta in un prisma parallelamente alla sua base, è uguale a questa base.

PROPOSIZIONE VIII. — *TEOREMA.*

I due prismi triangolari simmetrici in cui si divide un parallelepipedo sono equivalenti fra loro.

Dai vertici B ed F (fig. 208) si conducano perpendicolarmente al lato BF, i piani B*adc*, F*ehg*, i quali incontreranno, da una parte in *a*, *d*, *c*, dall' altra in *e*, *h*, *g*, i tre lati AE, DH, CG del parallelepipedo AG; le sezioni B*adc*, F*ehg*, saranno due parallelogrammi uguali. Queste sezioni sono uguali, perchè fatte da piani perpendicolari ad una stessa retta e quindi paralleli (7); sono parallelogrammi, perchè due lati opposti di una stessa sezione *a*B,

prisma EHFADB. Ma il supporre anche riferiti i vertici a un altro piano qualunque non altera in nulla la dimostrazione della prop. II nella quale si sono stabilite le relazioni scambievoli di questi poliedri.

dc, sono le intersezioni di due piani paralleli ABFE, DCGH, con uno stesso piano.

Per una simile ragione, la figura BaeF è un parallelogrammo, come pure le altre facce laterali BFgc, $cdhg$, $adhe$ del poliedro Badc Fehg; dunque questo poliedro è un prisma (def. 4); e questo prisma è retto, poichè il lato BF è perpendicolare al piano della base.

Posto ciò, se col piano BFHD si divide il prisma retto Bh in due prismi triangolari retti aBdeFh, BdcFhg; dico che il prisma triangolare obbliquo ABDEFH sarà equivalente al prisma triangolare retto aBdeFh.

In fatti, avendo questi due prismi una parte comune ABDheF, basterà provare che le rimanenti parti, cioè i poliedri BaADd, FeEHh sono equivalenti fra loro.

Ora, a cagione dei parallelogrammi ABFE, aBFe, i lati AE, ae, uguali al loro parallelo BF, sono uguali fra loro; così, togliendo la parte comune Ae, resterà Aa = Ee. Si proverà parimente che Dd = Hh.

Per operare ora la sovrapposizione dei due poliedri BaADd, FeEHh, si ponga la base Feh sulla sua uguale Bad; allora il punto e cadendo in a, e il punto h in d, i lati eF, hH, cadranno sui loro uguali aA, dD, perchè sono perpendicolari allo stesso piano Bad. Dunque i due poliedri di cui si tratta coincideranno intieramente l'uno coll'altro; dunque il prisma obbliquo BADFEH è equivalente al prisma retto BadFeh.

Si dimostrerà similmente che il prisma obbliquo BDCFHG è equivalente al prisma retto BdcFhg. Ma i due prismi retti BadFeh, BdeFhg sono uguali fra loro, poichè hanno la stessa altezza BF, e le loro basi Bad, Bde sono metà di uno stesso parallelogrammo (3). Adunque i due prismi triangolari BADFEH, BDCFHG, equivalenti a prismi uguali, sono equivalenti fra loro.

Corollario. Ogni prisma triangolare ABDHEF è la metà del parallelepippedo AG, costruito sullo stesso angolo triedro A, e gli stessi lati AB, AD, AE.

PROPOSIZIONE IX. — *TEOREMA*.

Se due parallelepippedi abbiano una base comune e le loro basi superiori siano comprese in un medesimo piano e fra le medesime parallele, questi due parallelepippedi saranno equivalenti fra loro.

I due parallelepippedi AG, AL (fig. 209) abbiano la base comune ABCD e le loro basi superiori EFGH, IKLM siano comprese in un medesimo piano e fra le parallele EK, HL; dico che questi due parallelepippedi sono equivalenti.

Tre casi possono darsi, secondo che EI è maggiore, minore, o uguale EF; ma la dimostrazione è la stessa per tutti i casi; e primieramente dico che il prisma triangolare AEIDHM è uguale al prisma triangolare BFKCGL.

In fatti, poichè AE è parallela a BF ed HE a GF, l'angolo AEI=BFK, HEI=GFK, e HEA=GFB. Di questi sei angoli i tre primi formano l'angolo triedro E, i tre secondi l'angolo triedro F; dunque, poichè gli angoli rettilinei sono rispettivamente uguali, e similmente disposti, ne segue che gli angoli triedri E ed F sono uguali. Ora, se si pone il prisma AEM sul prisma BFL, e da prima la base AEI sulla base BFK, queste due basi, essendo uguali, coincideranno; e, poichè l'angolo triedro E è uguale all'angolo triedro F, il lato EH cadrà sul suo uguale FG; ned altro ci abbisogna per dimostrare che i due prismi coincideranno in tutta la loro estensione; perocchè la base AEI e la costola EH determinano il prisma AEM, come la base BFK e la costola FG determinano il prisma BFL (3); dunque questi prismi sono uguali. Ma se dal poliedro AL si toglie il prisma AEM, resterà il parallelepippedo AIL; e se dal solido AL si tolga il prisma BFL, resterà il parallelepippedo AEG; dunque i due parallelepippedi AIL, AEG sono equivalenti fra loro.

PROPOSIZIONE X. — *TEOREMA.*

Due parallelepippedi che abbiano la stessa base e la stessa altezza, sono equivalenti fra loro.

Sia ABCD (fig. 210) la base comune ai due parallelepippedi AG, AL; poichè essi hanno la stessa altezza, le loro basi superiori EFGH, IKLM, saranno sullo stesso piano. Di più, i lati EF ed AB sono uguali e paralleli, al pari dei due IK ed AB; dunque EF è uguale e parallela a IK; per una simile ragione GF è uguale e parallela ad LK. Siano prolungati i lati EF, HG, come pure LK, IM, fino a che gli uni e gli altri formino colle loro intersezioni il parallelogrammo NOPQ; è chiaro che questo parallelogrammo sarà uguale a ciascuna delle basi EFGH, IKLM. Ora, se s'immagini un terzo parallelepippedo, che colla stessa base inferiore ABCD, abbia per base superiore NOPQ, questo terzo parallelepippedo sarà equivalente al parallelepippedo AG (9), perchè avendo la stessa base inferiore, le basi superiori sono comprese in un medesimo piano fra le medesime parallele GQ, FN. Per la stessa ragione questo terzo parallelepippedo sarebbe equivalente al parallelepippedo AL; dunque i due parallelepippedi AG, AL i quali hanno la stessa base e la stessa altezza, sono equivalenti fra loro.

PROPOSIZIONE XI. — *TEOREMA.*

Ogni parallelepippedo può esser cangiato in un parallelepippedo rettangolo equivalente che avrà la stessa altezza e una base equivalente.

Sia AG (fig. 210) il parallelepippedo proposto; dai punti A, B, C, D si conducano AI, BK, CL, DM perpendicolari al piano della base; si formerà così il parallelepippedo AL equivalente al parallelepippedo AG, e le cui facce laterali, AK, BL, ec. saranno rettangoli. Se dunque la base ABCD è un rettangolo, AL sarà il pa-

rallelepippedo rettangolo equivalente al parallelepippedo proposto AG. Ma se ABCD non è un rettangolo, si tirino AO, BN (fig. 211) perpendicolari su CD, indi OQ ed NP perpendicolari sulla base; si avrà il poliedro ABNOIKPQ che sarà un parallelepippedo rettangolo: in fatti, per costruzione, la base ABNO e la sua opposta IKPQ sono rettangoli; le facce laterali son pur tali, perchè le costole AI, OQ, ec. sono perpendicolari al piano della base; dunque il poliedro AP è un parallelepippedo rettangolo. Ma i due parallelepippedi AP, AL, possono considerarsi come aventi la stessa base ABKI e la stessa altezza AO; dunque il parallelepippedo AG, ch' erasi da prima cangiato in un parallelepippedo equivalente AL, trovasi nuovamente cangiato in un parallelepippedo rettangolo equivalente AP, che ha la stessa altezza AI, e la cui base ABNO è equivalente alla base ABCD.

PROPOSIZIONE XII. — *TEOREMA.*

Due parallelepippedi rettangoli che hanno la stessa base, stanno fra loro come le altezze.

Sia ABCD (fig. 212) la base comune; supponiamo primamente che le altezze AE, AI siano fra loro come due numeri interi, per esempio, come 15 ad 8. Si dividerà AE in 15 parti uguali, delle quali AI ne conterrà 8, e dai punti di divisione x, y, z, ec. si meneranno dei piani paralleli alla base. Questi piani divideranno il parallelepippedo AG in 15 parallelepippedi parziali che saranno tutti uguali fra loro, avendo basi uguali ed altezze uguali; basi uguali, perchè ogni sezione MIKL fatta in un prisma parallelamente alla sua base ABCD è uguale a questa base (7); altezze uguali, perchè le altezze sono le divisioni stesse Ax, xy, xz, ec. Ora di questi 15 parallelepippedi uguali, 8 sono contenuti in AL; dunque il volume del parallelepippedo AG sta a quello del parallelepippedo AL come 15 a 8, o in generale come l'altezza AE all'altezza AI.

In secondo luogo, se il rapporto di AE ad AI non si può esprimere in numeri, dico che parimente si avrà *sol.* AG : *sol.* AL :: AE : AI. Imperocchè se questa proporzione non ha luogo, suppo-

niamo che si abbia *sol.* AG : *sol.* AL::AE : AO. Dividasi AE in parti uguali, di cui ciascuna sia minore di OI, vi sarà almeno un punto di divisione *m* fra O ed I. Sia P il parallelepippedo che ha per base ABCD e per altezza A*m*; poichè le altezze AE, A*m* sono fra loro come due numeri interi, si avrà *sol.* AG : P::AE : A*m*. Ma si ha per ipotesi, *sol.* AG : *sol.* AL::AE : AO; dunque risulta *sol.* AL : P::AO : A*m*, Ma AO è maggiore di A*m*; dunque bisognerebbe perchè la proposizione avesse luogo, che il parallelepippedo AL fosse maggiore di P. Ora all'incontro n'è minore; dunque è impossibile che il quarto termine della proporzione *sol.* AG : *sol.* AL::AE : *x* sia una retta maggiore di AI. Con un ragionamento simile si dimostrerebbe che il quarto termine della proporzione, non può essere minore di AI; dunque è uguale ad AI; e però i parallelepippedi rettangoli che hanno la stessa base sono fra loro come le altezze.

PROPOSIZIONE XIII. — *TEOREMA.*

Due parallelepippedi rettangoli che hanno la stessa altezza stanno fra loro come le rispettive basi.

Sia AE (fig. 213) l'altezza comune dei due parallelepippedi; messi questi l'uno accanto all'altro, come li rappresenta la figura, si prolunghi il piano ONKL, fino a che incontri il piano DCGH secondo PQ; si avrà un terzo parallelepippedo AQ, che si potrà paragonare a ciascuno dei parallelepippedi AG, AK. I due parallelepippedi AG, AQ, avendo la stessa base AEHD sono fra loro come le rispettive altezze AO, AB; parimente i due AQ, AK, avendo la stessa base AOLE sono fra loro come le loro altezze AD, AM. Si avranno così le due proporzioni

sol. AG : *sol.* AQ::AB : AO,
sol. AQ : *sol.* AK::AD : AM.

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni, e omettendo nel risultamento il moltiplicatore comune *sol.* AQ, si avrà

$$sol.\ AG : sol.\ AK :: AB \times AD : AO \times AM.$$

Ma AB×AD rappresenta la base ABCD ed AO×AM la base AMNO; dunque questi due parallelepippedi rettangoli stanno fra loro come le rispettive basi.

PROPOSIZIONE XIV. — *PROBLEMA*.

Due parallelepippedi rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze, ovvero come i prodotti delle loro tre dimensioni.

Imperocchè, situati i due parallelepippedi AG, AZ (fig. 213) in modo che le loro facce abbiano di comune l'angolo BAE, si prolunghino i piani necessari per formare il terzo parallelepippedo AK della stessa altezza col parallelepippedo AG. Si avrà, per la proposizione precedente,

$$sol.\ AG : sol.\ AK :: ABCD : AMNO.$$

Ma i due parallelepippedi AK, AZ, che hanno la stessa base AMNO, stanno fra loro come le altezze AE, AX; sicchè si ha

$$sol.\ AK : sol.\ AZ :: AE : AX.$$

Moltiplicando queste due proporzioni per ordine, ed omettendo nel risultamento il fattor comune *sol.* AK, si avrà

$$sol.\ AG : sol.\ AZ :: ABCD \times AE : AMNO \times AX.$$

In cambio delle basi ABCD, AMNO, si può mettere AB×AD ed AO×AM; donde verrà

$$sol.\ AG : sol.\ AZ :: AB \times AD \times AE : AO \times AM \times AX.$$

Dunque due parallelepippedi rettangoli qualunque stanno fra loro ec.

Scolio. Segue da ciò che si può prendere per misura di un parallelepippedo rettangolo il prodotto della sua base per la sua al-

tezza, o sia il prodotto delle sue tre dimensioni. Su questo principio noi valuteremo tutti gli altri solidi.

Per l'intelligenza di questa misura fa d' nopo ricordarsi che intendesi per prodotto di due o più rette, il prodotto dei numeri che rappresentano queste rette, e questi numeri dipendono dall' unità lineare la cui scelta è arbitraria; posto ciò, il prodotto delle tre dimensioni di un parallelepipedo è un numero che non significa nulla per sè stesso, e che sarebbe differente se si prendesse una nuova unità lineare. Ma se si moltiplichino parimente le tre dimensioni di un altro parallelepipedo, valutandole colla medesima unità lineare, i due prodotti staranno fra loro come i due volumi dei parallelepipedi, e daranno l'idea della loro grandezza relativa.

Supponiamo che le tre dimensioni del parallelepipedo A siano 3, 5, 2; il loro prodotto sarà $3\times5\times2=30$; le tre dimensioni del parallelepipedo B siano 7, 4, 1; il loro prodotto sarà $7\times4\times1=28$. Si avrà dunque la proporzione $A : B :: 30 : 28$, la quale esprime che ci è un terzo solido ch' entra 30 volte esattamente nel parallelepipedo A e 28 volte in B; sicchè se si prende per unità di volume questo terzo solido, i due parallelepipedi A o B saranno espressi rispettivamente dai numeri interi 30 e 28. Ora così appunto si suol fare, o questo terzo solido che si prende per unità è il cubo formato sull' unità lineare; se, per esempio, quest' unità lineare sia il *palmo*, il parallelepipedo A conterrebbe 30 palmi cubici e B 28. Sarebbe facile anche di vederlo colla figura in un modo analogo a quello tenuto in geometria piana pei rettangoli che contenevano tanti quadrati fatti sull' unità lineare quanto era il prodotto delle loro due dimensioni valutate colla stessa unità lineare.

Essendo uguali fra loro le tre dimensioni di un cubo, se il lato è 1, la solidità sarà $1\times1\times1=1$; se il lato è 2, la solidità sarà $2\times2\times2=8$; se il lato è 3, la solidità sarà $3\times3\times3=27$; o così di seguito; laonde, essendo i lati dei cubi come i numeri 1, 2, 3, ec. i cubi stessi, o le loro solidità, sono come le terze potenze di questi numeri, cioè come 1, 8, 27, ec. Di qui è che in aritmetica chiamasi *cubo* d' un numero la sua terza potenza, cioè il prodotto di tre fattori uguali a questo numero.

Se si proponesse di fare un cubo doppio di un cubo dato, bisognerebbe che il lato del cubo richiesto stesse al lato del cubo dato come la radice cubica di 2 sta all' unità. Si trova facilmente, con una costruzione geometrica, la radice quadrata di 2, perchè questa è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui ciascun cateto sia = 1; ma non si può similmente trovare la radice cubica, almeno colle semplici operazioni della geometria elementare, lo quali consistono a non impiegare se non linee rette delle quali conoscansi due punti, e cerchi il cui centro e i cui raggi siano determinati.

Per ragione di questa difficoltà il problema della *duplicazione del cubo* è stato celebre presso gli antichi geometri, come quello della *trisezione dell' angolo*, il quale è presso a poco dello stesso ordine. Ma già da gran tempo si conoscono le soluzioni di cui sono suscettibili queste sorte di problemi, le quali soluzioni, comechè meno semplici delle costruzioni della geometria elementare, non sono tuttavia nè meno esatte, nè meno rigorose.

PROPOSIZIONE XV. — *TEOREMA.*

La solidità di un parallelepipedo, e in generale la solidità di un prisma qualunque, è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Imperocchè 1° un parallelepipedo qualunque è equivalente a un parallelepipedo rettangolo di uguale base e di uguale altezza (11). Ora la solidità di quest' ultimo è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque la solidità del primo è parimente uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

2° Ogni prisma triangolare è la metà del parallelepipedo costruito in modo che abbia la stessa altezza e una base doppia (8). la solidità di quest' ultimo è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque quella del prisma triangolare è uguale al prodotto della sua base, metà di quella del parallelepipedo, moltiplicata per la sua altezza.

3° Un prisma qualunque può esser diviso in tanti prismi triangolari di uguale altezza quanti triangoli si possono formare nel

poligono che servegli di base. Ma la solidità di ciascun prisma triangolare è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; e poichè l'altezza è la stessa per tutti, ne segue che la somma di tutti i prismi parziali, sarà uguale alla somma di tutti i triangoli che servon loro di basi, moltiplicata per l'altezza comune. Dunque la solidità di un prisma poligono qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario I. Se si paragonano due prismi che hanno la stessa altezza, i prodotti delle basi per le altezze staranno come le basi; dunque *due prismi di uguale altezza stanno fra loro come le rispettive basi;* per una simile ragione *due prismi di uguali basi stanno fra loro come le altezze rispettive.*

II. *Due prismi che hanno basi equivalenti e la stessa altezza sono equivalenti.*

III. Sia A la base di un prisma, H la sua altezza; siano A' ed H' la base e l'altezza di un altro prisma; per essere questi prismi equivalenti, si dee avere $A\times H = A'\times H'$. Quest' uguaglianza dà la proporzione $A : A' :: H' : H$; dunque *due prismi che hanno le loro basi in ragion reciproca delle altezze, sono equivalenti.*

Scolio I. Volendo dividere un prisma triangolare in quattro prismi triangolari uguali, si dividerà la base in quattro parti uguali come si è indicato nello scolio II della prop. XVII, lib. III, part. I, e poi si costruiranno sui quattro triangoli quattro prismi triangolari che finiscano ai quattro triangoli corrispondenti della base superiore del prisma dato.

Volendo dividere la solidità di un prisma triangolare in un certo numero di parti uguali e di parti che serbino fra loro un dato rapporto, si dividerà la superficie nelle ragioni date del triangolo che gli serve di base, come s'è indicato nello scolio II della prop. VI, lib. III, part. I, e poi si costruiranno i prismi triangolari come prima.

II. Nel parallelepipedo stanno fra loro le facce in ragion reciproca delle altezze rispettive, perchè si può prendere qualunque faccia per base, e si ha sempre la solidità del parallelepipedo uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza.

PROPOSIZIONE XVI. — *LEMMA.*

Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla base; 1° i lati e l'altezza saranno divisi in parti proporzionali; 2° e la sezione sarà un poligono simile alla base.

Imperocchè 1° essendo paralleli i piani ABC, *abc* (fig. 214) le loro intersezioni AB, *ab* con un terzo piano SAB saranno parallele; dunque i triangoli SAB, *Sab* sono simili ed hassi la proporzione SA : *Sa*::SB : *Sb*; si avrebbe parimente SB : *Sb*::SC : *Sc*, e così di seguito. Dunque i lati SA, SB, SC, ec. sono tagliati proporzionalmente in *a, b, c*, ec. L'altezza SO è tagliata nella stessa proporzione al punto *o*; poichè OB e *bo* sono parallele, e quindi si ha SO : *So*::SB : *Sb*.

2° Poichè *ab* è parallela ad AB, *bc* a BC, *cd* a CD, ec., l'angolo *abc*=ABC, l'angolo *bcd*=BCD, e così di seguito. In oltre a cagione dei triangoli simili SAB, *Sab*, si ha AB : *ab*::SB : *Sb*; ed a cagione dei triangoli simili SBC, *Sbc*, si ha SB : *Sb*::BC : *bc*; dunque AB : *ab*::BC : *bc*; si avrebbe parimente BC : *bc*::CD : *cd*, e così di seguito. Dunque i poligoni ABCDE, *abcde* hanno gli angoli rispettivamente uguali e i lati omologhi proporzionali; dunque sono simili.

Corollario. Siano SABCDE, SXYZ due piramidi il cui vertice è comune e che hanno la stessa altezza, o le cui basi sono situate in un medesimo piano; se si tagliano queste piramidi con uno stesso piano parallelo al piano delle basi, donde risultano le sezioni *abcde*, *xyz*; dico che *le sezioni* abcde, xyz *staranno fra loro come le basi.*

Imperocchè i poligoni ABCDE, *abcde* essendo simili, le loro superficie stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi AB, *ab*; ma AB : *ab*::SA : *Sa*; dunque ABCDE:*abcde*::$\overline{SA}^2$: $\overline{Sa}^2$. Ma poichè *abcxyz* non è che uno stesso piano, si ha pure SA : *Sa*::SX : *Sx*; dunque ABCDE : *abcde*::XYZ : *xyz*; dunque le sezioni *abcde, xyz* stanno fra loro come le basi ABCDE, XYZ. Dunque se le basi

ABCDE, XYZ sono equivalenti, le sezioni fatte ad uguale altezza sono del pari equivalenti.

Scolio. Quando si conosca l'altezza Oo di un *tronco* piramidale terminato dalle due basi ABCDE, *abcde*, cioè di quel poliedro che rimane togliendo dalla piramide SABCDE, l'altra S*abcde* con una sezione parallela alla base; è facile, dietro ciò che si è or ora dimostrato, trovare l'altezza della piramide intiera. Infatti si ha $ab : AB :: So : SO$, e *dividendo*, $AB-ab : AB :: SO-So : SO$; ma $SO-So=Oo$; dunque $AB-ab : AB :: Oo : SO$. I tre primi termini di questa proporzione sono noti; con essi dunque si determinerà il quarto SO.

PROPOSIZIONE XVII. — *TEOREMA.*

Due tetraedri di basi equivalenti ed altezze uguali sono equivalenti.

Siano SABC, *sabc* (fig. 215) i due tetraedri le cui basi ABC, *abc* che supponiamo poste su uno stesso piano, sono equivalenti ed hanno la stessa altezza TA; se questi tetraedri non sono equivalenti sia *sabc* il minore e sia Ax l'altezza di un prisma che costituito sulla base ABC sarebbe uguale alla loro differenza.

Dividasi l'altezza comune AT in parti uguali, ciascuna minore di Ax, e sia k una di queste parti; dai punti di divisione dell'altezza si facciano passare dei piani paralleli al piano delle basi; le sezioni fatte da ciascuno di questi piani sui due tetraedri saranno equivalenti (16, cor.), come DEF, e *def*, GHI e *ghi*, ec. Posto ciò, sui triangoli ABC, DEF, GHI, ec. presi per base, si costruiscano dei prismi esterni i quali abbiano per costole le parti AD, DG, GH, ec. del lato SA; parimente sui triangoli *def*, *ghi*, *klm*, ec., presi per basi, si costruiscano nel secondo tetraedro dei prismi interni che abbiano per costole le parti corrispondenti del lato *sa*; tutti questi prismi parziali avranno per altezza comune k.

La somma dei prismi esterni del tetraedro SABC è maggiore di questo tetraedro, la somma dei prismi interni del tetraedro *sabc* è minore di questo tetraedro; dunque per queste due ragioni la differenza tra le due somme dei prismi dovrà esser maggiore della differenza fra i due tetraedri.

Ora, a partire dalle basi ABC, *abc*, il secondo prisma esterno DEFG è equivalente al primo prisma interno *defa*, perchè le loro basi DEF, *def* sono equivalenti ed hanno la medesima altezza *k*; equivalenti sono per la stessa ragione il terzo prisma esterno GHIK e il secondo interno *ghid*, il quarto esterno, e il terzo interno, e così di seguito fino all'ultimo degli uni e degli altri. Adunque tutti i prismi esterni del tetraedro SABC ad eccezione del primo ABCD, hanno i loro equivalenti nei prismi interni del tetraedro *sabc*. Dunque il prisma ABCD è la differenza tra la somma dei prismi esterni del tetraedro SABC, e la somma dei prismi interni del tetraedro *sabc*; ma la differenza fra queste due somme è maggiore della differenza di questi tetraedri; dunque bisognerebbe che il prisma ABCD fosse maggiore del prisma ABCX; ora per lo contrario n'è minore, perchè essi hanno la stessa base ABC e l'altezza *k* del primo è minore dell'altezza A*x*c del secondo. Dunque l'ipotesi dalla quale si è partito non potrebbe aver luogo; dunque i due tetraedri SABC, *sabc* di basi equivalenti e di altezze uguali sono equivalenti.

PROPOSIZIONE XVIII. — *TEOREMA.*

Ogni tetraedro è la terza parte del prisma triangolare di uguale base e di uguale altezza.

Sia SABC (fig. 216) un tetraedro, ABCDES un prisma triangolare di uguale base e di uguale altezza; dico che il tetraedro è la terza parte del prisma.

Tolgasi dal prisma il tetraedro SABC; resterà il solido SACDE che si può considerare como una piramide quadrangolare il cui vertice è S e che ha per base il parallelogrammo ACDE; tirisi la diagonale CE e conducasi il piano SCE che dividerà la piramide quadrangolare in due tetraedri SACE, SDCE. Questi due tetraedri hanno per altezza comune la perpendicolare abbassata dal vertice S sul piano ACDE; hanno basi uguali, perchè i triangoli ACE, DCE sono le due metà del parallelogrammo; dunque i due tetraedri SACE, SDCE sono fra loro equivalenti; ma il tetraedro SDCE, ed il tetraedro SABC hanno basi uguali ABD, DES; hanno anche

la stessa altezza ch'è la distanza dei piani paralleli ABC, DES; dunque i due tetraedri SABC, SDCE sono equivalenti; ma si sono dimostrati equivalenti i tetraedri SDCE, SACE; dnnque i tre tetraedri SABC, SDCE, SACE, che compongono il prisma ABCD sono equivalenti fra loro. Dunque il tetraedro SABC è la terza parte del prisma ABD che ha la stessa base e la stessa altezza.

Corollario Ogni tetraedro ha per misura la terza parte del prodotto della sua base per la sua altezza.

PROPOSIZIONE XIX. — *TEOREMA.*

Ogni piramide ha per misura la terza parte del prodotto della sua base per la sua altezza.

Sia la piramide SABCDE (fig, 214); facendo passare i piani SEB, SEC per le diagonali EB, EC, si dividerà la piramide poligona SABCDE in vari tetraedri che avranno tutti la medesima altezza SO. Ma, pel teorema precedente, ciascuna di questi tetraedri si misura moltiplicando ciascuna delle basi ABE, BCE, CDE, per la terza parte della sua altezza SO; dunque la somma dei tetraedri, o la piramide SABCDE, avrà per misura la somma dei triangoli ABE, BCE, CDE, o il poligono ABCDE, moltiplicato per $\frac{1}{3}$ So; dunque ogni piramide ha per misura la terza parte del prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario I. Ogni piramide è la terza parte del prisma di uguale base e di uguale altezza.

II. Due piramidi di uguale altezza stanno fra loro come le rispettive basi, e due piramidi di uguali basi stanno fra loro come le rispettive altezze.

III. Due piramidi che hanno le basi in ragion reciproca delle altezze sono equivalenti.

Scolio I. Dicasi dei tetraedri quel medesimo che si è detto dei prismi triangolari nello scolio I della prop. XV; e dicasi delle loro facce e delle loro altezze quel medesimo che si è detto del parallelepippedo nello scolio II della stessa proposizione.

II. Si può valutare la solidità di ogni poliedro scomponendolo in piramidi e questa scomposizione può farsi in più guise; una

delle più semplici è di far passare i piani di divisione pel vertice di un medesimo angolo poliedro; allora si avranno tante piramidi parziali quante facce vi sono nel poliedro, eccettuate quelle che formano l'angolo poliedro donde partono i piani di divisione. [a]

PROPOSIZIONE XX. — *TEOREMA*.

Due poliedri simmetrici sono equivalenti fra loro.

Perocchè 1° due tetraedri simmetrici SABC, TABC (fig. 202) hanno per misura comune il prodotto della base ABC per la terza parte dell'altezza SO o TO; dunque questi tetraedri sono fra loro equivalenti.

2° Se si divide in un modo qualunque l'uno dei poliedri simmetrici in tetraedri, si potrà dividere parimente l'altro in tetraedri simmetrici; ora i tetraedri sono rispettivamente equivalenti; dunque gl'intieri poliedri saranno equivalenti, o sia uguali in solidità.

Scolio. Questa proposizione sembrava risultare immediatamente dalla prop. II, ove si fa vedere che in due poliedri simmetrici

[a] Si può anche cangiare il poliedro in una piramide equivalente in uo modo analogo a quello onde si trova di un dato poligono un triangolo equivalente.

Diviso che si sarà io piramidi in un modo qualunqua il poliedro, sia a la base ed h l'altezza di una di queste piramidi; si cangeranno tutte le rimanenti piramidi io altre equivalenti e che abbiaoo tutte l'altezza h; per determiuare le basi di queste nuove piramidi, si ricorrerà al principio dimostrato di sopra cha le piramidi equivalenti hanno le basi in ragion reciproca delle altezze; onde se siano a', h' la base e l'altezza di una delle rimanenti piramidi del poliedro, la base richiesta sarà determinata dalla proporzione $h : h' :: a' : x$. Determioate dunque che si saranoo tutte qoeste basi, si prenderà uo poligono uguale alla loro somma, e la piramide che ha per base questo poligono a per altezza h sarà equivalente al dato poliedro.

Questa costruzione fu suggerita a Carlo Rocco che l'ha posta nella sua *Geometria solida* dall'estiolo mio genitore; ma essa noo si dovrà tenere che come un mezzo di meglio completare le proposizioni della solida corrispondenti a quelle della piana, perchè in quanto alla misura del poliedro certameote molto più semplice e brave si è il misorare partitamente ciascuna delle piramidi in cui esso si acompooa.

tutte le parti costitnenti dell'uno sono uguali alle parti costituenti dell'altro; ma non era men necessario di dimostrarla in un modo rigoroso.

PROPOSIZIONE XXI.— *TEOREMA.*

La solidità del tronco piramidale a basi parallele è uguale alla somma di tre piramidi che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e le cui basi sono la base inferiore del tronco, la superiore, e la media proporzionale tra queste due basi.

Sia SABCDE (fig. 217) una piramide tagliata dal piano *abcd* parallelo alla sua base; sia TFGH un tetraedro la cui base e l'altezza siano uguali o equivalenti a quelle della piramide SABCDE. Si ponno supporre le due basi situate sopra uno stesso piano; e allora il piano *abcd*, prolungato, determinerà nel tetraedro una sezione *fgh*, situata alla stessa altezza al di sopra del piano comune delle basi; donde risulta che la sezione *fgh* sta alla sezione *abd* come la base FGH sta alla base ABD (16); e poichè le basi sono equivalenti, le sezioni saranno pur tali. Le piramidi S*abcde*, T*fgh* sono dunque equivalenti, perchè hanno la stessa altezza e basi eqnivalenti. Le intiere piramidi SABCDE, FGH, sono equivalenti per la stessa ragione; dunque i tronchi ABD*dab*, FGH*hfg* sono equivalenti, e per conseguenza basterà dimostrare la proposizione enunciata pel solo caso del tronco di tetraedro.

Sia FGH*hfg* (fig. 218) un tronco di tetraedro a basi parallele; pei tre punti F, *g*, H, conducasi il piano F*g*H, il quale taglierà dal tronco il tetraedro *g*FGH. Questo tetraedro ha per base la base inferiore FGH del tronco e per altezza l'altezza di questo tronco, perchè il vertice *g* è nel piano della base snperiore *fgh*.

Dopo aver tolto questo tetraedro, resterà la piramide quadrangolare *gfh*HF, il cui vertice è *g* e la base *fh*HF. Pei tre punti *f*, *g*, H conducasi il piano *fg*H, il quale dividerà la piramide quadrangolare in due tetraedri *g*F*f*H, *gfh*H. Quest'ultimo ha per base la base superiore *gfh* del tronco, e per altezza l'altezza del tronco, perocchè il suo vertice H appartiene alla base inferiore; abbia-

mo dunque già due delle tre piramidi che debbono comporre il tronco.

Rimane a considerare la terza $gFfH$; ora se si meni gK parallela ad fF, e s' immagini un nuovo tetraedro $fFHK$, il cui vertice è K e la base FfH, questi due tetraedri avranno la stessa base FfH, e la stessa altezza, perchè i vertici g e K sono situati sopra una retta gK parallela ad Ff, o per conseguenza parallela al piano di questa base; dunque questi tetraedri sono equivalenti. Ma il tetraedro $fFKH$ può essere considerato come avente il suo vertice in f, e così avrà la stessa altezza del tronco; quanto alla sua base FHK, dico ch'è media proporzionale tra le basi FGH, fgh. Infatti i triangoli FHK, fgh, hanno un angolo uguale $F = f$, e un lato uguale $EK = fg$; si ha dunque (prop. 25, lib. 3, part. 1) $FHK : fgh :: FH : fh$. Si ha pure $FHG : FHK :: FG : FK$ o fg. Ma i triangoli simili FGH, fgh dànno $FG : fg :: FH : fh$; dunque $FGH : FHK :: FHK : fgh$; e così la base FHK è media proporzionalo fra le due basi FGH, fgh. Dunque un tronco di tetraedro a basi parallele equivale a tre tetraedri che hanno per altezza comune l' altezza del tronco, e le cui basi sono la base inferioro del tronco, la superiore, e la media proporzionale tra queste due basi.

Scolio. Il tronco di tetraedro a basi parallele nello spazio corrisponde al trapezio su di un piano; infatti si è veduto già che il tetraedro corrisponde al triangolo; ora come il tronco di tetraedro nasce dal tagliar questo con un piano parallelo alla base, così il trapezio nasce dal tagliare il triangolo con una retta parallela alla base.

Si può anche osservare cho la diagonale di un trapezio lo divide in due triangoli che hanno per altezza comune l'altezza del trapezio e per basi uno la base inferiore e l'altro la superiore di esso trapezio.

PROPOSIZIONE XXII. — *TEOREMA.*

Se si taglia un prisma triangolare con un piano inclinato alla base, il tronco sarà uguale alla somma di tre tetraedri che hanno per base comune la base inferiore del tronco e per vertici quelli della base superiore.

Sia ABC (fig. 216) la base del prisma, DES il piano inclinato a questa base; trattasi di valutare la solidità del tronco ABCDES.

Pei tre punti S, A, C facciasi passare il piano SAC il quale taglierà dal tronco ABCDES il tetraedro SACB; questo tetraedro ha per base ABC e per vertice il punto S.

Dopo tolto questo tetraedro, resterà la piramide quadrangolare SACDE, di cui S è il vertice ed ACDE la base. Per i tre punti S, E, C conducasi ancora un piano SEC, il quale dividerà la piramide quadrangolare in due tetraedri SACE, SCDE.

Il tetraedro SAEC, che ha per base il triangolo AEC e per vertice il punto S, è equivalente a un tetraedro EABC che avrebbe per base AEC e per vertice il punto B. Questi due tetraedri hanno la stessa base; hanno anche la stessa altezza, perchè essendo la retta BS parallela a ciascuna delle rette AE, CD, è parallela al loro piano ACE; dunque il tetraedro SAEC è equivalente al tetraedro EABC che può essere considerato come avente per base ABC e per vertice il punto E.

Il terzo tetraedro SCDE può esser cangiato da prima in ASCD; perchè questi due hanno la stessa base SCD; hanno anche la stessa altezza, perocchè AE è parallela al piano SCD; dunque i tetraedri SCDE, ASCD sono equivalenti. Dopo ciò il tetraedro ASCD può essere cangiato in ABCD, perchè questi due hanno la base comune ACD; hanno di più la medesima altezza, perchè i loro vertici S e B sono situati sopra una parallela al piano della base. Dunque il tetraedro SCDE, equivalente ad ASCD è pure equivalente ad ABCD; ora, quest'ultimo può essere riguardato come avente per base ABC e per vertice il punto D.

Dunque finalmente il tronco prismatico ABCDES è uguale alla

somma di tre tetraedri che hanno per base comune ABC e i cui vertici sono rispettivamente i punti D, C, S.

Corollario. Se le costole AE, BS, CD sono perpendicolari al piano della base, saranno in pari tempo le altezze dei tre tetraedri che compongono il tronco; in modo che la solidità di questo tronco sarà espressa da $\frac{1}{3}ABC\times AE+\frac{1}{3}ABC\times BS+\frac{1}{3}ABC\times CD$, quantità che riducesi ad $\frac{1}{3}ABC\times(AE+BS+CD)$.

PROPOSIZIONE XXIII. — *TEOREMA.*

Due tetraedri simili hanno le facce omologhe simili e gli angoli triedri omologhi uguali.

Secondo la definizione, i due tetraedri SABC, TDEF (fig. 203) sono simili se i due triangoli SAB, ABC sono simili ai due TDE, DEF e similmente disposti, cioè se si ha l'angolo ABS=DET, BAS=EDT, ABC=DEF, BAC=EDF, e se in oltre l'inclinazione dei piani SAB, ABC è uguale a quella dei piani TDE. DEF; posto ciò, dico che questi tetraedri hanno tutte le facce simili rispettivamente, e gli angoli triedri omologhi uguali.

Prendasi BG=ED, BH=EF, BI=ET e congiungasi GH, GI, IH. Il tetraedro TDEF è uguale al tetraedro IGBH, perocchè presi i lati GB, BH uguali ai lati DE, EF, e l'angolo GBH essendo, per ipotesi, uguale all'angolo DEF, il triangolo GBH è uguale a DEF; dunque per operare la sovrapposizione dei due tetraedri. si può da prima situare la base DEF sulla sua uguale GBH; indi, poichè il piano DTE è inclinato su DEF della stessa quantità che il piano SAB sopra ABC, è chiaro che il piano DET cadrà indefinitamente sul piano ABS. Ma, per ipotesi, l'angolo DET=GBI; dunquè ET cadrà sulla sua uguale BI; e poichè i quattro punti D, E. F, T coincidono coi quattro G, B, H, I, ne segue (1) che il tetraedro TDEF coinciderà con IGBH.

Ora, a cagione dei triangoli uguali DEF, GBH, si ha l'angolo BGH=EDF=BAC; dunque GH è parallela ad AC. Per una simile ragione GI è parallela ad AS; dunque il piano IGH è parallelo ad SAC (15,1). Di qui segue che il triangolo IGH, o il suo uguale TDF è simile ad SAC, e che il triangolo IBH, o il suo uguale TEF è

simile ad SBC; dunque i due tetraedri SABC, TDEF hanno le loro facce rispettivamente simili. Di più, hanno gli angoli triedri omologhi uguali.

Perocchè si è già posto l' angolo triedro E sul suo omologo B, e lo stesso si potrebbe fare per gli altri angoli triedri omologhi; ma si vede immediatamente che due angoli triedri omologhi sono uguali, per esempio, gli angoli T ed S, perchè sono formati da tre angoli rettilinei rispettivamente uguali e similmente disposti.

Dunque, due tetraedri simili hanno le facce omologhe simili e gli angoli triedri omologhi uguali.

Corollario I. I triangoli simili nei due tetraedri forniscono le proporzioni AB : DE :: BC : EF :: AC : DF :: AS : DT :: SB : TE :: SC : TF; dunque *nei tetraedri simili i lati omologhi sono proporzionali.*

II. E poichè gli angoli triedri omologhi sono uguali, ne segue, che *gli angoli diedri omologhi sono uguali.*

III. Se si taglia il tetraedro SABC con un piano GIH parallelo a una delle facce SAC, il tetraedro parziale BGIH sarà simile all'intiero BASC; perchè i triangoli BGI, BGH sono simili ai triangoli BAS, BAC ciascuno a ciascuno, e similmente disposti; gli angoli diedri sono rispettivamente uguali; dunque i due tetraedri sono simili.

IV. In generale *se si taglia una piramide qualunque SABCDE* (fig. 217) *con un piano* abcde *parallelo alla base, la piramide parziale* Sabcde *sarà simile all' intera SABCDE.*

Perchè le basi ABCDE, *abcde* sono simili, e congiungendo AC, *ac*, si è provato or ora che il tetraedro SABC è simile ad S*abc*; adunque il punto S è determinato per rapporto alla base ABC come il punto S per rapporto alla base *abc* (def. 18); dunque le due piramidi SABCDE, S*abcde* sono simili.

Scolio. In cambio dei cinque dati richiesti dalla definizione perchè due tetraedri siano simili, se ne potrebbero sostituire cinque altri, secondo le differenti combinazioni, e ne risulterebbero altrettanti teoremi, fra i quali si può distinguere il seguente: *Due tetraedri sono simili quando hanno i lati omologhi proporzionali.*

Perocchè se si hanno le proporzioni (fig. 203) AB : DE :: BC :

EF :: AC : DF :: AS : DT :: SB : TE :: SC : TF, le quali racchiudono cinque condizioni, i triangoli ABS, ABC saranno simili ai triangoli DET, DEF e similmente disposti. Si avrà pure il triangolo SBC simile a TEF; dunque i tre angoli rettilinei che formano l'angolo triedro B saranno rispettivamente uguali ai tre che formano l'angolo triedro E; donde segue che l'inclinazione dei piani SAB, ABC è uguale a quella dei loro omologhi TDE, DEF, e che così i due tetraedri sono simili.

II. L' uguaglianza non è che un caso particolare della simiglianza; e se in due tetraedri simili due lati omologhi divengono uguali i tetraedri risulteranno uguali. Si ponno così stabilire le seguenti proposizioni per l' uguaglianza dei tetraedri.

1.° *Due tetraedri sono uguali quando hanno tre facce rispettivamente uguali e similmente disposte.*

2.° *Due tetraedri sono uguali quando hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce rispettivamente uguali e similmente disposte.*

3.° *Due tetraedri sono uguali quando hanno una faccia uguale adiacente a tre angoli diedri rispettivamente uguali.*

Del resto ciascuna di queste proposizioni si può dimostrare assolutamente per via della sovrapposizione.

Colla sovrapposizione pure si vedrà che *due piramidi qualunque sono uguali quando hanno basi uguali e due facce triangolari rispettivamente uguali e similmente disposte.*

Quanto all' uguaglianza dei poliedri si consulti la nota XI.

PROPOSIZIONE XXIV.— *TEOREMA.*

Due poliedri simili hanno le facce omologhe simili e gli angoli poliedri omologhi uguali.

Sia ABCDE (fig. 219) la base di un poliedro; siano M ed N i vertici di due angoli poliedri, fuori di questa base, determinati dai tetraedri MABC, NABC dei quali ABC è la base comune; siano nell'altro poliedro *abcde* la base omologa o simile ad ABCDE, *m* ed *n* i vertici omologhi ad M ed N, determinati dai tetraedri

mabc, *nabc* simili a MABC, NABC; dico da prima che le distanze MN, *mn* sono proporzionali ai lati omologhi AB, *ab*.

Infatti i tetraedri MABC, *mabc* essendo simili, l'inclinazione dei piani MAC, BAC è uguale a quella dei piani *mac*, *bac*; parimente essendo simili i tetraedri NABC, *nabc*, l'inclinazione dei piani NAC, BAC è uguale a quella dei piani *nac*, *bac*; se dunque si tolgano le prime inclinazioni dalle ultime, resterà l'inclinazione dei piani NAC, MAC uguale a quella dei piani *nac*, *mac*. Ma a cagione della simiglianza dei medesimi tetraedri, il triangolo MAC è simile a *mac*, e il triangolo NAC e simile a *nac*; dunque i due tetraedri MNAC, *mnac*, hanno due facce rispettivamente simili, similmente disposte e ugualmente inclinate fra loro; dunque questi tetraedri sono simili, e i loro lati omologhi dànno la proporzione MN : *mn*::AM : *am*. D'altra parte AM : *am*::AB : *ab*; dunque MN : *mn*::AB : *ab*.

Siano P e *p* due altri vertici omologhi dei medesimi poliedri, e si avrà parimente PN : *pn*::AB : *ab*, PM : *pm*::AB : *ab*. Dunque MN : *mn*::PN : *pn*::PM : *pm*. Dunque *il triangolo PNM che congiunge tre vertici qualunque di uno dei poliedri è simile al triangolo* pnm *che congiunge i tre vertici omologhi dell'altro poliedro.*

Siano ancora Q e *q* due vertici omologhi e il triangolo PQN sarà simile a *pqn*. Dico inoltre che l' inclinazione dei piani PQN, PMN è uguale a quella dei piani *pqn*, *qmn*.

Perocchè se si congiungano QM e *qm*, si avrà sempre il triangolo QNM simile a *qnm*. Concepiscasi in N un angolo triedro composto dai rettilinei QNM, QNP, PNM, e in *n* un angolo triedro formato dai rettilinei *qnm*, *qnp*, *pnm*; poichè questi angoli sono rispettivamente uguali, ne segue che gli angoli triedri sono uguali. Dunque l'inclinazione dei due piani PNQ, PNM è uguale a quella dei loro omologhi *pnq*, *pnm*; dunque se i due triangoli PNQ, PNM stessero su uno stesso piano, nel qual caso avrebbesi l'angolo QNM = QNP + PNM, si avrebbe anche l'angolo *qnm* = *qnp*+*pnm*, e i due triangoli *qnp*, *pnm* sarebbero anche su uno stesso piano.

Tutto quanto si è qui dimostrato ha luogo, quali che siano gli angoli M, N, P, Q paragonati ai loro omologhi *m*, *n*, *p*, *q*.

Supponiamo ora che la superficie di uno di questi poliedri sia

...visa in triangoli ABC, ACD, MNP, NPQ, ec., si vede che la superficie dell' altro poliedro conterrà un ugual numero di triangoli *abc*, *acd*, *mnp*, *npq*, ec., simili e similmente disposti; e se più triangoli, come MPN, NPQ, ec. appartengono ad una medesima faccia e sono in uno stesso piano, i loro omologhi *mnp*, *npq*, saranno parimente in uno stesso piano. Dunque ogni faccia poligona dell' un poliedro corrisponderà a una faccia simile nell' altro; dunque i due poliedri saran compresi da uno stesso numero di piani simili e similmente disposti. Dico di più che gli angoli poliedri omologhi sono uguali.

In fatti, se l'angolo poliedro N, per esempio, è formato dai rettilinei QNP, PNM, MNR, QNR, l' angolo poliedro omologo *n* sarà formato dagli angoli rettilinei *qnp*, *pnm*, *mnr*, *qnr*. Ora, questi angoli rettilinei sono uguali rispettivamente e i loro angoli diedri omologhi sono uguali; dunque i due angoli poliedri possono combaciare.

Dunque finalmente due poliedri simili hanno le facce omologhe simili e gli angoli poliedri omologhi uguali.[1]

Corollario. Segue dalla dimostrazione precedente che se con quattro vertici di un poliedro si forma un tetraedro, e se ne formi un secondo coi quattro vertici omologhi di un poliedro simile, questi due tetraedri saranno simili, perchè avranno i lati omologhi proporzionali (23, scol. 1).

Vedesi nello stesso tempo che due diagonali omologhe, per esempio AN, *an*, stanno fra loro come due lati omologhi AB, *ab*.

[1] Questa è la definizione che voleva dei poliedri simili Roberto Simson; ma essa è un teorema da essere dimostrato. La definizione data dal Legendre è esatta perchè prima i due tetraedri simili e poi generalmente i poliedri simili si possono chiaramente costruire nè vi è intoppo, come ve ne sarebbero moltissimi volendoli costruire colla definizione del Simson. Ma di ciò si legga la nota XI dell' autore.

Anche il definire due poligoni simili per quelli che hanno angoli uguali e lati omologhi proporzionali implica un teorema, e però noi, analogamente ai poliedri, abbiamo definito prima per triangoli simili i triangoli equiangoli, e poi per poligoni simili quelli che sono composti di triangoli rispettivamente simili, similmente disposti e formati dalle diagonali menate nel poligono da uno stesso suo vertice. Così pure senza niuno intoppo si potranno costruire i poligoni. Il Le-

PROPOSIZIONE XXV. — *TEOREMA.*

Due poliedri simili possono dividersi in uno stesso numero di tetraedri simili rispettivamente e similmente disposti.

Imperocchè si è veduto già che le superficie dei due poliedri possono dividersi in uno stesso numero di triangoli simili rispettivamente e similmente disposti. Si considerino tutti i triangoli di un poliedro, eccetto quelli che formano l'angolo poliedro A, come le basi di altrettanti tetraedri il cui vertice è in A; questi tetraedri, presi insieme, comporranno il poliedro; dividasi ugualmente l'altro poliedro in tetraedri che abbiano per vertice comune quello dell'angolo *a* omologo ad A; è chiaro che il tetraedro che congiunge quattro vertici di uno dei poliedri sarà simile al tetraedro che congiunge i quattro vertici omologhi dell'altro. Dunque due poliedri simili, ec.

PROPOSIZIONE XXVI. — *TEOREMA.*

Due piramidi simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.

Imperocchè, essendo simili le due piramidi, la minore potrà èsser posta nella maggiore in modo che abbiano l'angolo S (fig. 214) comune. Allora le basi ABCDE, *abcde* saranno parallele, perchè, essendo le facce omologhe simili (23), l'angolo S*ab*=SAB, come pure S*bc*=SBC; dunque il piano *abc* è parallelo al piano ABC (15,1). Posto ciò sia SO la perpendicolare abbassata dal vertice S sul piano ABC, e sia *o* il punto ove questa perpendicolare incontra il piano *abc*; si avrà, secondo ciò che si è dimostrato nella prop. XV, SO : S*o*::SA : S*a* : AB : *ab*, e per conseguenza

$$\tfrac{1}{3}\,SO : \tfrac{1}{3}\,So :: AB : ab.$$

gendre però dà la definizione antica; ma ne conosceva l'inesattezza di cui parla nella sua prima nota ove propone il cangiamento da noi eseguito.

Ma le basi ABCDE, *abcde*, essendo due poligoni simili, dànno la proporzione

$$\text{ABCDE} : abcde :: \overline{\text{AB}}^2 : \overline{ab}^2.$$

Moltiplicando queste due proporzioni termine a termine, ne risulterà

$$\text{ABCDE}\times\tfrac{1}{3}\text{SO} : abcde\times\tfrac{1}{3}\text{So} :: \overline{\text{AB}}^3 : \overline{ab}^3;$$

ora, ABCDE$\times\frac{1}{3}$SO è la solidità della piramide SABCDE (18), ed *abcde*$\times\frac{1}{3}$So è quella della piramido S*abcde*; dunque queste due piramidi stanno fra loro come i cubi dei loro lati omologhi.

PROPOSIZIONE XXVII. — *TEOREMA.*

Due poliedri simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi e le loro superficie come i quadrati di questi stessi lati.

1.° Poichè due poliedri simili possono dividersi in uno stesso numero di tetraedri simili rispettivamente (25). Ora i due tetraedri simili APNM, *apnm* (fig. 219) stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi AM, *am*, o dei lati omologhi AB, *ab*. Lo stesso rapporto avrà luogo tra due tetraedri omologhi qualunque; dunque la somma di tutti i tetraedri che compongono uno dei poliedri, o questo poliedro stesso, sta all' altro poliedro come il cubo d' un lato qualunque del primo sta al cubo del lato omologo del secondo.

2.° Due facce omologhe, essendo simili, stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi; questi lati sono comuni a due facce adiacenti; dunque le facce omologhe sono proporzionali; onde chiamando a, b, c, ec. le facce di un poliedro ed a', b', c', ec. le facce omologhe in un poliedro simile, si avrà $a : a' :: b : b' :: c : c' ::$ ec.; dalla qualo proporzione risulta $a+b+c+$ ec. $: a'+b'+c'+$ec. $:: a : b$. Ma le due facce omologhe a e b stanno come i quadrati di due lati omologhi qualunque; dunque $a+b+c+$ec. ed $a'+b'+$

e'+ec. cioè le due superficie dei poliedri stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi qualunque.

Scolio. Le superficie convesse dei prismi e delle piramidi simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi; perchè queste superficie sono composte di facce rispettivamente simili. Si può notare anche che le superficie convesse ed intiere delle piramidi e dei cilindri simili stanno fra loro come i quadrati delle rispettive altezze, essendo queste proporzionali ai lati.

PROPOSIZIONE XXVIII. — *TEOREMA.*

La superficie convessa di un prisma obbliquo ha per misura il prodotto di un suo lato pel perimetro di una sezione perpendicolare a questo lato. La superficie convessa di un prisma retto ha per misura il prodotto del perimetro della base per l' altezza.

1.° Sia ABCDEFGH (fig. 208) un prisma obbliquo, e facciasi in esso una sezione $eFgh$ con un piano perpendicolare al lato FB; così tutti gli altri lati, per essere paralleli a FB, saranno perpendicolari alla medesima sezione.

Ora il parallelogrammo ABFE ha per misura $BF \times Fe$; il parallelogrammo BFGC ha per misura $BF \times Fg$; e così delle altre facce, nelle quali l'altezza sarà il rispettivo lato della sezione e la base sempre uguale ad FB. Dunque la somma di tutti questi parallelogrammi, ovvero la superficie convessa del prisma è uguale a $BF \times Fe + BF \times Fg + BF \times gh + BF \times eh$, quantità che si riduce a $BF \times (Fg + gh + eh)$, come facea d'uopo dimostrare.

2.° Nel prisma retto le facce sono tanti rettangoli che hanno per altezza comune l' altezza del prisma e per basi i vari lati della base; onde si conchiuderà, come qui innanzi, che la superficie convessa di un prisma retto ha per misura il prodotto del perimetro della base per l' altezza.

PROPOSIZIONE XXIX. — *TEOREMA.*

La superficie convessa di una piramide regolare ha per misura il prodotto del perimetro della base per la metà della perpendicolare abbassata dal vertice sopra un lato di questa base.

Per la definizione, la base della piramide regolare è un poligono regolare e l'altezza passa pel centro di questo poligono. Da ciò segue che i triangoli che formano la superficie convessa della piramide sono isosceli e tutti uguali fra loro; ciascuno di essi ha per misura un lato della base della piramide per la metà della perpendicolare abbassata su questo lato dal vertice della piramide; tutte queste perpendicolari sono uguali, come obblique alla base ugualmente distanti dal piede della perpendicolare, distanti cioè sempre per l'apotema della base; dunque la superficie convessa di una piramide regolare, ec.

PROPOSIZIONE XXX. — *TEOREMA.*

La superficie convessa di un tronco di piramide regolare a basi parallele ha per misura il prodotto della semisomma dei perimetri delle basi per la distanza di due lati paralleli di questi perimetri.

Imperocchè essendo uguali i triangoli SAB, SBC ec. (fig. 217), uguali saranno pure i loro simili *Sab*, *Sbc*, ec.; dunque i trapezi *a*AB*b*, *b*BC*c*, ec. sono uguali. Ciascuno di questi ha per misura la semisomma delle basi parallele per la sua altezza; quest'altezza è da per tutto la stessa; dunque la superficie convessa di un tronco di piramide regolare a basi parallele, ec.

Scolio. Solamente le superficie convesse di questi tre poliedri offrono tre teoremi da non tacersi, e utili nella pratica; in quanto agli altri poliedri, le loro superficie si misureranno col misurare partitamente ciascuna loro faccia.

Scolio generale.

Si può presentare in termini algebrici, cioè nel modo più succinto, il riepilogo delle principali proposizioni di questo libro concernenti le solidità dei poliedri.

Sia B la base di un prisma, H la sua altezza, la solidità del prisma sarà $B \times H$ ovvero BH.

Sia C la base di una piramide, H la sua altezza; la solidità della piramide sarà $B \times \frac{1}{3}H$, ovvero $H \times \frac{1}{3}B$, ovvero $\frac{1}{3}BH$.

Sia H l'altezza di un tronco di piramide a basi parallele, siano A e B le sue basi; $\sqrt{AB}$ sarà la media proporzionale fra di loro, e la solidità del tronco sarà $\frac{1}{3} H \times (A+B+\sqrt{AB})$.

Sia B la base di un tronco di prisma triangolare, H, H′, H″ le altezze dei suoi tre vertici superiori, la solidità del tronco sarà $\frac{1}{3}B \times (H+H'+H'')$.

Siano finalmente P e p le solidità di due poliedri simili, A ed a due lati o due diagonali omologhe di questi poliedri; si avrà $P : p :: A^3 : a^3$.

LIBRO III

LA SFERA.

DEFINIZIONI

I. La *sfera* è un solido terminato da una superficie curva, i cui punti sono tutti ugualmente distanti da un punto interno che si chiama *centro*.

Si può immaginare che la sfera è prodotta dalla rivoluzione del semicerchio DAE (fig. 220) attorno il diametro DE; pérocchè la superficie descritta in questo movimento dalla curva DAE avrà tutti i suoi punti a uguale distanza dal centro C.

La sfera nello spazio corrisponde al cerchio nel piano; perchè come questo è un piano racchiuso da una linea di uniforme curvatura, così quella è uno spazio racchiuso da una superficie di uniforme curvatura.

II. Il *raggio della sfera* è una retta condotta dal centro a un punto della superficie; il *diametro* o *asse* è una retta che passa pel centro ed è terminata da ambe le parti alla superficie.

Tutti i raggi della sfera sono uguali; tutti i diametri doppi del raggio e però anche uguali.

III. Sarà dimostrato (prop. 1) che ogni sezione della sfera, fatta da un piano, è un cerchio; posto ciò, si chiama *cerchio massimo* la sezione che passa pel centro; *cerchio minore* quella che non vi passa.

IV. Un *piano è tangente* alla sfera quando non ha che un sol punto comune colla superficie della sfera.

Mentre il semicerchio ACE (fig. 226) descrive la sfera, la tangente AG descriverà il piano tangente alla sfera.

V. Il *polo di un cerchio* della sfera è un punto della superficie della sfera ugualmente distante da tutti i punti della circonferenza di questo cerchio. Si dimostrerà (prop. 6) che ogni cerchio, massimo o minore, ha sempre due poli.

VI. *Triangolo sferico* è una parte della superficie della sfera racchiusa da tre archi di cerchio massimo.

Questi archi che si chiamano *lati* del triangolo, si suppongono sempre minori della semicirconferenza, perchè, come si vedrà in appresso, conosciuti che sono questi, è facile conoscere anche quelli che avessero per lati archi maggiori della semicirconferenza. Gli angoli diedri dei loro piani di sezione sono gli angoli del triangolo.

VII. Un triangolo sferico prende il nome di *equilatero, isoscele, scaleno* nei medesimi casi che nel triangolo rettilineo. Si chiama poi *rettangolo*, *birettangolo*, *trirettangolo*, secondo che abbia uno, due o tre angoli retti; l'esistenza di cotesti triangoli sarà dimostrata.

La geometria elementare tratta solamente dei triangoli formati da archi di cerchi massimi per due ragioni; la prima che gli archi di cerchi minori, non essendo questi sempre uguali, hanno differenti curvature; la seconda che l'arco di cerchio massimo che passa per due punti della superficie della sfera, è, come sarà dimostrato (prop. 3) la minima distanza su questa superficie di quei due punti, proprietà analoga a quella delle rette che formano i lati di un triangolo rettilineo.

VIII. *Poligono sferico* è una porzione della superficie della sfera racchiusa da più archi di cerchio massimo.

IX. *Fuso* è la parte della superficie della sfera compresa tra due semicerchi massimi i quali terminano a un diametro comune.

X. *Cuneo* o *unghia sferica* è la porzione della solidità della sfera compresa fra i medesimi semicerchi ed a cui il fuso serve di base.

XI. *Piramide sferica* è la porzione della solidità della sfera compresa tra i piani di un angolo poliedro il cui vertice è al centro. La *base* della piramide è il poligono sferico intercetto dagli stessi piani.

XII. Si chiama *zona* la porzione della superficie della sfera compresa tra due piani paralleli che intersegano la sfera. Quando uno

di questi piani fosse tangente, allora la porzione di superficie della sfera prende il nome di *calotta*.

XIII. *Segmento sferico* è la porzione della solidità della sfera compresa fra due piani paralleli che ne sono le basi. Uno di questi piani può essere tangente alla sfera; allora il segmento sferico ha una sola base.

XIV. L'*altezza di una zona* o *di un segmento sferico* è la distanza dei due piani paralleli che sono basi del segmento.

XV. Mentre il semicerchio DAE (fig. 220) girando attorno il diametro descrive la sfera, ogni settore circolare, come DCF o FCH, descrive un solido che si chiama *settore sferico*.

PROPOSIZIONE PRIMA. — *TEOREMA.*

Ogni sezione della sfera, fatta da un piano, è un cerchio.

Sia AMB (fig. 221) la sezione fatta da un piano nella sfera il cui centro è C. Dal punto C conducasi la perpendicolare CO sul piano AMB, e differenti rette CM, CM a differenti punti della curva AMB che termina la sezione.

Le obblique CM, CM, CB, sono uguali, perchè sono raggi della sfera; esse dunque sono ugualmente distanti dalla perpendicolare CO (7, 1); dunque tutte le rette OM, OM, OB sono uguali; dunque la sezione AMB è un cerchio di cui O è il centro.

Corollario I. Se la sezione passa pel centro della sfera, il suo raggio sarà il raggio della sfera; dunque tutti i cerchi massimi sono ugali fra loro.

II. Due cerchi massimi si tagliano sempre in due parti nguali; perchè la loro intersezione comune, passando pel centro, è un diametro.

III. Ogni cerchio massimo divide la sfera e la sua superficie in due parti uguali; perchè, se dopo aver separati i due *emisferi*, si applichino sulla base comune, volgendo da una stessa parte le loro convessità, le due superficie coincideranno l'una coll'altra, senza di che vi sarebbero dei punti disugualmente distanti dal centro.

IV. Il centro di un cerchio minore e quello della sfera stanno sopra una stessa retta perpendicolare al piano del cerchio minore.

V. I cerchi minori sono tanto più piccoli quanto più distano dal centro della sfera; perchè più grande è la distanza CO, più piccola è la corda AB diametro del cerchio minore AMB.

VI. Per due punti dati sulla superficie della sfera, si può sempre far passare un arco di un cerchio massimo; perocchè i due punti dati e il centro della sfera sono tre punti che determinano la posizione di un piano. Ma se i due punti dati fossero alle estremità del diametro, allora questi due punti e il centro starebbero in linea retta e vi sarebbe una infinità di cerchi massimi che potrebbero passare pei due punti dati.

PROPOSIZIONE II. — *TEOREMA.*

In ogni triangolo sferico un lato qualunque è minore della somma degli altri due.

Sia ABC (fig. 222) un triangolo sferico, ed O il centro della sfera; si conducano i raggi OA, OB, OC. Se s' immaginano i piani AOB, AOC, COB, questi formeranno al punto O un angolo triedro, e gli angoli AOB, AOC, COB avranno per misura i lati AB, AC, BC del triangolo sferico ABC. Ora, ciascuno dei tre angoli rettilinei che formano l' angolo triedro è minore della somma degli altri due (22,1); dunque un lato qualunque del triangolo ABC è minore della somma degli altri due. Da ciò segue pure che un lato qualunque è maggiore della differenza degli altri due.

PROPOSIZIONE III. — *TEOREMA.*

Il più corto cammino da un punto ad un altro sulla superficie della sfera è l' arco di cerchio massimo che passa per questi due punti.

Sia ANB (fig. 223) l' arco di cerchio massimo che congiunge i punti A e B, e sia fuori di questo arco, se è possibile, M un punto della linea più corta tra A e B. Dal punto M si tirino gli archi di cerchio massimo MA, MB, e prendasi BN=MB.

Secondo il teorema precedente, l' arco ANB<AM+MB, toglien-do da ambe le parti BN=BM, resterà AN<AM. Ora, la distanza di B in M, sia che si confonda coll' arco BM, o che sia tutt'altra linea, è uguale alla distanza tra B ed N; perchè facendo girare il piano del cerchio massimo BM attorno al diametro che passa per B, si può portare il punto M sul punto N, e allora la linea più corta da M in B, quale che siasi, confonderassi con quella da N in B; dunque i due cammini da A in B, l' uno che passa per M, l'altro per N hanno una parte uguale da M in B e da N in B. Il primo è, per ipotesi, il più corto; dunque la distanza da A in M è più corta che quella da A in N; il che è assurdo, perchè l'arco AM è maggiore di AN; dunque nessun punto della linea più corta tra A e B non può star fuori dell'arco ANB; dunque questo stesso arco è la più corta linea fra le sue estremità.

PROPOSIZIONE IV. — *TEOREMA.*

La somma dei tre lati di un triangolo sferico è minore della circonferenza di un cerchio massimo.

Sia ABC (fig. 224) un triangolo sferico qualunque; si prolunghino i lati AB, AC, fino a che s'incontrino nuovamente in D. Gli archi ABD, ACD, saranno semicirconferenze, perchè due archi massimi si tagliano sempre in due parti uguali (1); ma nel triangolo BCD si ha il lato BC<BD+CD (2); aggiungendo da ambe le parti AB+AC, si avrà AB+AC+BC<ABD+ACD cioè minore di una circonferenza.

PROPOSIZIONE V. — *TEOREMA.*

La somma dei lati di ogni poligono sferico è minore della circonferenza di un cerchio massimo.

Sia, per esempio, il pentagono ABCDE (fig. 225); si prolunghino i lati AB, DC, fino al loro incontro in F; poichè BC è minore di BF+CF, il contorno del pentagono ABCDE è minore di quello del quadrilatero AEDF. Si prolunghino ancora i lati AE, FD

fino al loro incontro in G; si avrà ED<EG+GD; dunque il contorno del quadrilatero AEDF è minore di quello del triangolo AFG; questo è minore della circonferenza di un cerchio massimo; dunque *a fortiori* il contorno del poligono ABCDE è minore di questa stessa circonferenza.

Scolio. Questa proposizione è nel fondo la stessa che la XXIII del libro I, part. I; poichè, se O è il centro della sfera, si può immaginare al punto O un angolo poliedro formato dagli angoli rettilinei AOB; BOC, COD, ec. e la somma di questi angoli dev'essere minore di quattro angoli retti; il che punto non differisce dalla presente proposizione. La dimostrazione che ne abbiam data è differente da quella del libro I; l'una e l'altra suppongono che il poligono ABCDE è convesso, cioè che nessun suo lato prolungato non tagli la figura.

PROPOSIZIONE VI. — *TEOREMA*.

Se si conduca un diametro perpendicolare al piano di un cerchio massimo, le estremità del diametro saranno i poli di questo cerchio massimo e di tutti i cerchi minori ad esso paralleli.

Sia il diametro DE (fig. 220) perpendicolare al piano del cerchio massimo AMB; sarà così DC perpendicolare a tutte le rette CA, CM, CB, ec., condotte dal suo piede in questo piano; dunque tutti gli archi DA, DM, DB, ec. sono quadranti; il simile si dica degli archi EA, EM, EB, ec.; dunque i punti D ed E sono ciascuno ugualmente distanti da tutti i punti della circonferenza AMB; dunque essi sono i poli di questa circonferenza (def. 5).

In secondo luogo, il raggio DC, perpendicolare al piano AMB è perpendicolare al suo parallelo FNG; dunque passa pel centro O del cerchio FNG (1); dunque se si tirino le obblique DF, DN, DG, queste obblique si allontaneranno ugualmente dalla perpendicolare DO, e saranno uguali. Ma essendo le corde uguali, gli archi sono uguali; dunque tutti gli archi DF, DN, DG, ec. sono uguali

fra loro; dunque il punto D è il polo del cerchio minore FNG e per la stessa ragione il punto E è l'altro polo.

Corollario I. Ogni arco DM condotto da un punto dell'arco del cerchio massimo AMB al suo polo è un quadrante, e questo quadrante fa nello stesso tempo un angolo retto con l'arco AM. Perocchè essendo la retta DC perpendicolare al piano AMC, ogni piano DMC che passa per la retta DC è perpendicolare al piano AMC (18, 1); dunque l'angolo di questi piani, o, secondo la def. VI, l'angolo AMD, è un angolo retto.

II. Per trovare il polo di un arco dato AM, conducasi l'arco indefinito MD perpendicolare ad AM, prendasi MD uguale a un quadrante e il punto D sarà uno dei poli dell'arco MD; o pure, si conducano ai due punti A ed M gli archi AD ed MD perpendicolari ad AM, il punto di concorso D di questi due archi sarà il polo richiesto.

Per trovare il polo di un cerchio minore, non sapendosi la sua distanza, si farà uso solamente della seconda costruzione qui indicata.

III. Reciprocamente, se la distanza del punto D a ciascuno dei punti A ed M è uguale ad un quadrante, dico che il punto D sarà il polo dell'arco AM, e che nello stesso tempo gli angoli DAM, AMD saranno retti.

Imperocchè sia C il centro della sfera, e siano condotti i raggi CA, CD, CM; poichè gli angoli ACD, MCD, sono retti; la retta CD è perpendicolare alle due rette CA, CM; dunque ella è perpendicolare al loro piano; e però il punto D è il polo dell'arco AM, e quindi gli angoli DAM, AMD sono retti.

Scolio. Le proprietà dei poli ci forniscono il mezzo di tracciare sulla superficie della sfera degli archi colla medesima facilità che sopra una superficie piana. Si vede, per esempio, che facendo girare l'arco DF od ogni altra linea dello stesso intervallo attorno il punto D, l'estremità F descriverà il cerchio minore FNG; e si si fa girare il quadrante DFA attorno il punto D l'estremità A descriverà l'arco di cerchio massimo AM. [1]

[1] Nella pratica si potrà situare la punta di un compasso sul polo D e l'altra al punto F o al punto A; tenendo fissa la prima punta e facendo girare la seconda si descriveranno gli archi richiesti.

PROPOSIZIONE VII. — *LEMMA.*

Ogni piano perpendicolare all' estremità di un raggio è tangente alla sfera, e reciprocamente ogni piano tangente è perpendicolare al raggio che passa pel punto di contatto.

Sia FAG (fig. 226) un piano perpendicolare all'estremità di un raggio OA; se prendasi un punto qualunque M su questo piano, e si congiunga OM ed AM, l'angolo OAM sarà retto, e così la distanza OM sarà maggiore di OA. Il punto M è dunque fuori della sfera, e siccome lo stesso accade di ogni altro punto del piano FAG, ne segue che questo piano non ha che il solo punto A comune con la superficie della sfera; dunque esso è tangente a questa superficie (def. 4).

Reciprocamente se il piano è tangente, non avendo esso che il solo punto A comune alla superficie della sfera, la retta OA è la più corta di tutte quelle che si possono tirare dal centro della sfera sul piano FAG, e quindi OA è perpendicolare al piano FAG.

Scolio. Si può provare parimente che due sfere non hanno che un solo punto di comune e sono perciò tangenti fra loro; quando la distanza dei loro centri è uguale alla somma o alla differenza dei loro raggi, allora i centri e il punto di contatto sono in linea retta.

PROPOSIZIONE VIII. — *TEOREMA.*

L' angolo che fanno tra loro due archi di cerchi massimi è uguale all' angolo formato dalle tangenti di questi archi al loro punto d' incontro; ancora ha per misura l' arco di cerchio massimo descritto dal suo vertice come polo fra i suoi lati prolungati, se sia bisogno.

Sia BAC (fig. 226) l' angolo che formano i due archi di cerchi massimi AB, AC; e dal punto A si tirino a ciascuno di questi ar-

chi e in ciascuno dei loro piani le tangenti AF, AG. La prima tangente AF sarà perpendicolare al raggio AO; la seconda AG sarà perpendicolare allo stesso raggio AO. Dunque l'angolo FAG è uguale all'angolo dei piani OAB, OAC (18, 1), il quale è quello degli archi AB, AC e si dinota con BAC.

Parimente se l'arco AD è uguale a un quadrante, al pari di AE, le rette OD, OE saranno perpendicolari ad AO e l'angolo DOE sarà ancora uguale all'angolo dei piani AOD, AOE; dunque l'arco DE è la misura dell'angolo di questi piani, o la misura dell'angolo BAC.

Corollario. Gli angoli dei triangoli sferici possono paragonarsi fra loro per mezzo degli archi di cerchi massimi descritti dai loro vertici come poli e compresi fra i loro lati; in questo modo è facile di fare un angolo uguale ad un angolo dato.

Scolio. Gli angoli opposti al vertice, come ACO e BCN (fig. 238) sono uguali; perchè l'uno o l'altro è sempre l'angolo formato dai due piani ACB, OCN.

Anche si vede che nell'incontro dei due archi ACB ed OCN i due angoli adiacenti ACO, OCB, presi insieme, valgono sempre due angoli retti.

PROPOSIZIONE IX. — *TEOREMA.*

Se dai tre vertici di un triangolo sferico presi come poli si descrivano tre archi di cerchi massimi, si formerà un altro triangolo sferico i cui vertici saranno reciprocamente poli di ciascuno dei lati del primo triangolo.

Sia dato il triangolo ABC (fig. 227) e dai punti A, B, C, come poli, si descrivano gli archi di cerchi massimi EF, FD, DE che formano il triangolo DEF; dico che reciprocamente i tre punti D, E, F saranno i poli dei lati BC, AC, AB.

Imperocchè essendo il punto A il polo dell'arco EF, la distanza AE è un quadrante; il punto C essendo il polo dell'arco DE, la distanza CE è parimente un quadrante; dunque il punto E è distante per un quadrante da ciascuno dei punti A e C; dunque

esso è il polo dell'arco AC (6, cor. 3). Similmente si dimostrerà che D è il polo dell' arco BC ed F quello dell'arco AB.

Corollario. Dunque il triangolo ABC può essere descritto per mezzo di DEF come DEF per mezzo di ABC.

Scolio. Vari nomi si dànno ai triangoli ABC, DEF; noi li chiameremo *triangoli polari*.

Fa d' uopo osservare che oltre il triangolo DEF (fig. 228), tre altri se ne potrebbero formare con l' intersezione dei tre archi DE, EF, DF. Ma noi in appresso intenderemo parlare del solo triangolo centrale il quale è distinto dagli altri tre per questo che i due angoli A e D sono situati da una stessa parte di BC (fig. 227), i due B ed E da una stessa parte di AC, e i due C ed F da una stessa parte di AB. Così dunque ogni triangolo sferico non ha che un sol triangolo polaro.

PROPOSIZIONE X. — *TEOREMA*.

Ogni angolo di un triangolo sferico ha per misura la semicirconferenza di un cerchio massimo meno il lato opposto nel triangolo polare.

Facciasi la medesima costruzione che nel teorema precedente (fig. 227), o si prolunghino, so sia bisogno, i lati AB, AC fino a che incontrino EF in G ed H. Poichè il punto A è il polo dell'arco GH, l' angolo A avrà per misura l'arco GH. Ma l' arco FH è un quadrante al pari di GF, poichè E è il polo di AH ed F il polo di AG; dunque EH+GF valo una semicirconferenza. Ora EH+GF è lo stesso che EF + GH; dunque l' arco GH che misura l' angolo A è uguale ad una semicirconferenza meno il lato EF; parimente l' angolo B avrà per misura $\frac{1}{2}$ *circ*. — DF e l' angolo C, $\frac{1}{2}$ *circ*. — DE.

Questa proprietà dee essere reciproca fra i due triangoli, perch' essi derivansi nello stesso modo l' uno per mezzo dell' altro; si troverà così che gli angoli D, E, F del triangolo DEF, hanno per misura rispettivamente $\frac{1}{2}$ *circ*. — BC, $\frac{1}{2}$ *circ*. — AC, $\frac{1}{2}$ *circ*. — AB. In fatti l' angolo D, per esempio, ha per misura l'arco MI;

ora MI + BC = MC + BI = $\frac{1}{2}$ *circ.*; dunque l' arco MI misura dell' angolo D = $\frac{1}{2}$ *circ.* — BC, e così degli altri [1].

PROPOSIZIONE XI. — *TEOREMA*.

Se dalle estremità di un lato di un triangolo sferico come poli e con intervalli rispettivamente uguali agli altri due lati si descrivano due archi di cerchi minori; congiungendo colle due dette estremità il punto ove questi due archi s' incontrano, si formerà un altro triangolo sferico che avrà le sue parti uguali a quelle del primo triangolo.

Dato il triangolo ABC (fig. 229) se dal polo A e coll' intervallo AC si descrive l' arco di cerchio minore DEC; se dal polo B e coll' intervallo BC si descrive parimente l' arco DFC, e dal punto D ove questi due archi s' incontrano, si conducono gli archi di cerchio massimo AD, DB; dico che il triangolo ADB così formato avrà le sue parti uguali a quelle del triangolo ACB.

Imperocchè per costruzione il lato AD=AC, DB=BC, AB è comune; dunque questi due triangoli hanno i lati rispettivamente

[1] Se si congiunge il centro della sfera coi vertici di due triangoli sferici polari si formeranno due angoli triedri tali che gli angoli rettilinei dell' uno saranno i supplementi degli angoli diedri dell' altro. Infatti, essendo gli angoli rettilinei misurati dai lati dei triangoli, segue dalla proposizione dimostrata che un angolo rettilineo di uno degli angoli triedri e un angolo diedro dell' altro, sommati insieme, dànno due angoli retti, e così l' uno è supplemento dell' altro. Questi due angoli triedri si chiamano perciò *supplementari*, e per costruirli si potranno prima costruire i due triangoli sferici polari. Ma indipendentemente da questi, per formare di un dato angolo tiedro l' angolo tiedro supplementare si tireranno dal vertice dell' angolo dato tre piani perpendicolari a ciascuno dei tre lati dell' angolo triedro; questi tre piani colla loro intersezione formeranno l' angolo triedro richiesto, com' è facile vedere, costruendo la figura. Operando così, se si ponga il vertice comune nel centro della sfera, i due triangoli sferici determinati sulla sua superficie dai piani degli angoli triedri, saranno due triangoli polari e le proprietà loro saranno conseguenze di quelle degli angoli triedri supplementari. Si vede così che in generale dalle proprietà degli angoli triedri, dimostrate assolutamente, si possono derivare quelle dei triangoli sferici, o viceversa.

uguali. Dico ora che gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali.

Infatti se si suppone in O il centro della sfera si può concepire un angolo triedro formato al punto O dai tre angoli rettilinei AOB, AOC, BOC; si può concepire similmente un altro angolo triedro formato dai tre angoli rettilinei AOB, AOD, BOD. E poichè i lati del triangolo ABC sono uguali a quelli del triangolo ADB, ne segue che gli angoli rettilinei che formano uno di questi angoli triedri sono uguali rispettivamente a quelli che formano l' altro angolo triedro; ma in questo caso si è dimostrato (24, 1) che gli angoli diedri omologhi sono uguali; dunque gli angoli del triangolo sferico DAB sono uguali a quelli del triangolo CAB, cioè DAB = BAC, DBA=ABC ed ADB=ACB. Dunque i lati e gli angoli del triangolo ADB sono uguali ai lati e gli angoli del triangolo ABC.

Scolio. Intanto è da notare che questi due triangoli non potrebbero essere sovrapposti l' uno sull' altro per combaciare, poichè situando il lato AC dalla stessa parte di AB che il suo uguale AD, le due curvature delle superficie sarebbero rivolto in sensi inversi; e se queste curvature sono rivolte dalla medesima parte, come nella figura, i lati sono rivolti in un ordine inverso; e con ciò pure non è possibile il combaciamento. Devesi però eccettuare il caso in cui i due triangoli siano isosceli, perchè allora, com' è visibile, il combaciamento può bene aver luogo. L' uguaglianza di due triangoli sferici uguali in tutte le loro parti, ma che non ponno combaciare, è ciò che abbiamo già chiamato una uguaglianza per *simmetria*; laonde noi appelleremo i triangoli ACB, ADB *triangoli simmetrici* [1].

[1] Quando si prolungano i lati di un angolo triedro il cui centro sia nella sfera, fino a che incontri dalle due parti opposte la superficie di questa sfera, i due triangoli sferici che nasceranno saranno due triangoli sferici simmetrici. Infatti i due angoli triedri verticali sono, come è facile vedere, simmetrici, cioè hanno gli angoli rettilinei e gli angoli diedri rispettivamente uguali senza poter combaciare; dunque anche i triangoli sferici avranno i lati e gli angoli rispettivamente uguali senza che possano combaciare.

PROPOSIZIONE XII. — *TEOREMA.*

Due triangoli situati sulla medesima sfera o sopra sfere uguali sono uguali in tutte le loro parti, quando hanno un angolo uguale compreso fra lati rispettivamente uguali.

Sia il lato AB=EF (fig. 230), il lato AC=EG e l'angolo BAC=FEG; il triangolo EFG potrà esser situato sopra il triangolo ABC o sul suo simmetrico ABD nello stesso modo onde si sovrappongono due triangoli rettilinei i quali hanno un angolo uguale compreso fra i lati rispettivamente uguali. Dunque tutte le parti del triangolo EFG saranno uguali a quelle del triangolo ABC, cioè che oltre le tre parti supposte uguali, si avrà il lato BC = FG, l'angolo ABC = EFG, e l'angolo ACB=EGF.

PROPOSIZIONE XIII. — *TEOREMA.*

Due triangoli situati sulla medesima sfera o sopra sfere uguali sono uguali in tutte le loro parti quando hanno un lato uguale adiacente a due angoli rispettivamente uguali.

Perocchè l'uno di questi triangoli può esser posto sull'altro o sul suo simmetrico, come si fa nel caso simile dei triangoli rettilinei. (Vedi prop. VII, lib. I, part. 1).

PROPOSIZIONE XIV. — *TEOREMA.*

Se due triangoli situati sulla medesima sfera o sopra sfere uguali sono equilateri fra loro, saranno altresì equiangoli, e gli angoli uguali saranno opposti ai lati uguali.

Ciò è manifesto dalla proposizione XI, nella quale si è veduto che con tre lati dati AB, AC, BC non si possono formare che due

triangoli ACB, ABD, differenti in quanto alla posizione delle parti, ma uguali in quanto alla grandezza di queste parti medesime. Due triangoli equilateri fra loro sono o assolutamente uguali o almeno uguali per simmetria; nell'un caso e nell'altro ei sono equiangoli e gli angoli uguali sono opposti ai lati uguali.

PROPOSIZIONE XV. — *TEOREMA.*

In ogni triangolo sferico isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali, e reciprocamente, se due angoli di un triangolo sono uguali, il triangolo sarà isoscele.

1.° Sia il lato AB=AC (fig. 231); dico che si avrà l'angolo C=B; perchè se dal vertice A al punto D, medio della base, si meni l'arco AD, i due triangoli ABD, ADC avranno i loro tre lati rispettivamente uguali, cioè AD comune, BD=DC ed AB=AC; dunque pel teorema precedente, questi triangoli avranno gli angoli uguali e si avrà B=C.

2.° Sia l'angolo B=C; dico che si avrà AC=AB; perchè se il lato AB non è uguale ad AC, sia AB il maggiore dei due; prendasi BO=AC, e congiungasi OC. I due lati BO, BC saranno uguali ai due AC, BC; l'angolo compreso dai primi OBC è uguale all'angolo compreso dai secondi ACB; dunque i due triangoli BOC, ACB hanno le altre parti uguali (21), e si ha l'angolo OCB=ABC; ma l'angolo ABC, per ipotesi, =ACB; dunque si avrebbe OCB=ACB, il che è impossibile. Adunque non si può supporre AB differente da AC, e però i lati AB, AC opposti agli angoli uguali B e C, sono uguali.

Scolio. La medesima dimostrazione prova che l'angolo BAD = DAC, e che l'angolo BDA=ADC. Dunque questi due ultimi sono retti; dunque *l'arco condotto dal vertice di un triangolo sferico isoscele al punto di mezzo della base è perpendicolare a questa base, e divide l'angolo al vertice in due parti uguali.*

PROPOSIZIONE XVI. — *TEOREMA.*

In un triangolo sferico di due lati il maggiore è quello che si oppone all' angolo maggiore, e reciprocamente di due angoli il maggiore è quello che si oppone al lato maggiore.

1.º Sia l'angolo A>B (fig. 252); facciasi l'angolo BAD=B; si avrà AD=DB (15), ma AD+DC è maggiore di AC; in luogo di AD ponendo DB, si avrà DB+DC, ovvero BC, maggiore di AC.

2.º Se si suppone BC>AC, dico che l'angolo BAC sarà maggiore di ABC; perocchè se BAC fosse uguale ad ABC, si avrebbe BC=AC; e se si avesse BAC<ABC, ne seguirebbe, per ciò che si è dimostrato, BC<AC; il che è contrario alla supposizione. Dunque l'angolo BAC è maggiore di ABC.

PROPOSIZIONE XVII. — *TEOREMA.*

Se due triangoli sferici abbiano due lati rispettivamente uguali e l' angolo compreso dai primi maggiore dell' angolo compreso dai secondi, sarà il terzo lato del primo maggiore del terzo lato del secondo; e reciprocamente se abbiano due lati rispettivamente uguali e il terzo maggiore del terzo, sarà l'angolo compreso dai due primi lati maggiore dell' angolo compreso dai due secondi.

La dimostrazione, che può farsi sulla figura 253, è assolutamente simile a quella delle prop. X e XI, lib. I, part. I.

PROPOSIZIONE XVIII. — *TEOREMA.*

Se due triangoli tracciati sulla medesima sfera o sopra sfere uguali sono fra loro equiangoli, saranno altresì equilateri.

Siano A e B i due triangoli dati, P e Q i loro triangoli polari.

Poichè gli angoli sono uguali nei triangoli A e B. i lati saranno uguali nei polari P e Q (10); ma dall'essere i triangoli P e Q equilateri fra loro, ne segue ch' ei sono anche equiangoli (14); finalmente dall'essere uguali gli angoli nei triangoli P e Q, si deduce (10) che i lati sono uguali rispettivamente nei loro polari A e B. Dunque i triangoli equiangoli A e B sono in pari tempo equilateri fra loro.

Si può anche dimostrare la medesima proposizione senza il soccorso dei triangoli polari nel modo che segue.

Siano ABC, DEF (fig. 234) due triangoli equiangoli fra loro, in maniera che si abbia A=D, B=E, C=F; dico che si avrà il lato AB=DE, AC=DF, BC=EF.

Sul prolungamento dei lati AB, AC, prendasi AG=DE ed AH=DF; conginngasi GH e si prolunghino gli archi BC, GH, fino a che s'incontrino in I e K.

I due lati AG, AH sono, per costruzione, uguali ai due DF, DE; l'angolo compreso GAH = BAC = EDF; dunque (12) i triangoli AGH, DEF sono uguali in tutte le loro parti, e però l'angolo AGH=DEF=ABC, e l'angolo AHG=DFE=ACB.

Nei triangoli IBG, KBG, il lato BG è comune, l'angolo IGB = GBK; e poichè IGB+BGK è uguale a due retti, come pure GBK+IBG, ne segue che BGK=IBG. Dunque i triangoli IBG, GBK sono uguali (13); dunque IG=BK ed IB=GK.

Parimente dall'essere l'angolo AHG=ACB, si conchiuderà che i triangoli ICH, HCK, hanno un lato uguale adiacente a due angoli uguali; dunque essi sono uguali; e quindi IH=CK, ed HK=IC.

Ora, se dagli uguali BK, IG, si sottraggono gli uguali CK, IH, i resti BC, GH saranno uguali. Da altra parte l'angolo BCA = AHG, e l'angolo ABC=AGH; dunque i triangoli ABC, AHG hanno un lato uguale adiacente a due angoli uguali, e però sono uguali; ma il triangolo DEF è uguale in tutte le sue parti al triangolo AHG; dunque è pure uguale al triangolo ABC, e si avrà AB =DE, AC=DF, BC=EF; dunque se due triangoli sferici sono equiangoli fra loro, i lati opposti agli angoli uguali sono uguali.

Scolio. Questa proposizione non ha luogo nei triangoli rettilinei, nei quali dall'uguaglianza degli angoli non si può conchiudere che

la proporzionalità dei lati. Ma facile si è il rendersi ragione della differenza che corre in ciò fra i triangoli rettilinei e i triangoli sferici. Nella proposizione presente, al pari che nelle prop. XII, XIII, XIV, XVIII, ove trattasi del paragone dei triangoli, si dice espressamente che questi triangoli sono tracciati sulla medesima sfera o sopra sfere uguali. Ora gli archi simili sono proporzionali ai raggi; dunque sopra sfere uguali due triangoli non ponno essere simili senza essere uguali. Non è dunque maraviglia che l' uguaglianza degli angoli tragga seco l' uguaglianza dei lati.

Lo stesso non avverrebbe se i triangoli fossero tracciati sopra sfere disuguali; allora, essendo gli angoli uguali, i triangoli sarebbero simili, e i lati omologhi starebbero fra loro come i raggi delle sfere.

Possiamo conchiudere dalla presente proposizione e da quelle citate or ora sul paragone dei triangoli, che *due triangoli sferici sono uguali assolutamente o per simmetria sempre che di queste sei cose, i tre lati e i tre angoli, ne abbiano tre rispettivamente uguali.* E siccome i lati dei triangoli sferici misurano gli angoli rettilinei negli angoli triedri corrispondenti il cui vertice è nel centro della sfera; e gli angoli di questi triangoli rappresentano gli angoli diedri, così pure si conchiuderà che *due angoli diedri sono uguali assolutamente o per simmetria quando di queste sei cose, i tre angoli rettilinei e i tre angoli diedri, ne abbiano tre rispettivamente uguali.*

È chiaro anche da ciò che a volere determinare intieramente un triangolo sferico o un angolo diedro, oltre di tre dei suoi elementi, fa mestieri anche determinare la loro disposizione.

PROPOSIZIONE XIX. — *TEOREMA.*

La somma degli angoli di ogni triangolo sferico è minore di sei e maggiore di due angoli retti.

Imperocchè 1° ciascun angolo del triangolo sferico è minore di due angoli retti (come si vedrà nello scolio qui appresso); dunque la somma dei tre angoli è minore di sei angoli retti.

2° La misura di ciascun angolo di un triangolo sferico è uguale

alla semicirconferenza meno il lato corrispondente nel triangolo polare (10); dunque la somma dei tre angoli ha per misura tre mezze circonferenze meno la somma dei lati del triangolo polare. Ora quest' ultima somma è minore di una circonferenza (4); dunque, sottraendola da tre semicirconferenze, il resto sarà maggiore di una semicirconferenza, che è la misura di due angoli retti; dunque 2° la somma dei tre angoli di un triangolo sferico è maggiore di due angoli retti.

Corollario I. La somma degli angoli di un triangolo sferico non è costante come quella dei triangoli rettilinei; ella varia da due angoli retti fino a sei, senza potere essere uguale nè all' una nè all' altra. Il perchè due angoli dati non fanno conoscere il terzo. Il simile si dica degli angoli diedri di un angolo triedro.

II. Un triangolo sferico può avere due o tre angoli retti, due o tre angoli ottusi.

Se il triangolo ABC (fig. 235) è *birettangolo* (def. 7), cioè se ha due angoli retti B e C, il vertice A sarà il polo della base BC (6); e i lati AB, AC saranno quadranti.

Se in oltre l'angolo A è retto il triangolo ABC sarà *trirettangolo*, i suoi angoli saranno tutti retti e quindi i suoi lati quadranti. Il triangolo trirettangolo è contenuto otto volte nella superficie della sfera; il che vedesi nella fig. 236, supponendo l'arco MN uguale a un quadrante.

Scolio. Abbiamo supposto in tutto quanto precede, e conforme alla defin. VI che i triangoli sferici abbianno i loro lati sempre minori della semicirconferenza; ne segue allora che gli angoli sono sempre minori di due angoli retti; perocchè se il lato AB (fig. 224) è minore della semicirconferenza, al pari di AC, i suoi archi debbono essere prolungati entrambi per incontrarsi in D. Ora i due angoli ABC, CBD, presi insieme, valgono due angoli retti; dunque l' angolo ABC solo è minore di due angoli retti.

Osserveremo intanto che esistono triangoli sferici dei quali alcuni lati sono maggiori della semicirconferenza, ed alcuni angoli maggiori di due angoli retti. Infatti, se si prolunghi il lato AC in una intiera circonferenza ACE, ciò che rimane, togliendo dall'emisfero il triangolo ABC, è un nuovo triangolo, che si può dinotare anco con ABC, e i cui lati sono AB, BC, AEDC. Vedesi dun-

que che il lato AEDC è maggiore della semicirconferenza AED; ma nello stesso tempo l'angolo opposto in B supera due angoli retti della quantità CBD.

Del resto, se si escludono dalla definizione i triangoli i cui lati ed angoli sono sì grandi, ciò fassi perchè la loro risoluzione ovvero la determinazione delle loro parti riducesi sempre a quella dei triangoli racchiusi nella definizione. In fatti, facilmente si vede che se si conoscessero gli angoli e i lati del triangolo ABC, immediatamente si conoscerebbero gli angoli e i lati del triangolo di medesimo nome ch'è il rimanente dell'emisfero.

PROPOSIZIONE XX. — *TEOREMA.*

Il fuso sta alla superficie della sfera come l'angolo di questo fuso sta a quattro angoli retti, o come l'arco che misura questo angolo sta alla circonferenza.

Sia il fuso AMBNA (fig. 236), e suppongasi da prima che l'arco MN stia alla circonferenza in un rapporto razionale, per esempio come 5 a 48. Si dividerà la circonferenza MNQ in 48 parti uguali, delle quali MN ne conterrà 5; congiungendo poi il polo A e i punti di divisione con tanti quadranti, si avranno 48 triangoli nell'emisfero AMNPQ, i quali saranno tutti fra loro uguali, perchè avranno tutte le loro parti uguali. L'intiera sfera conterrà dunque 96 di qnesti triangoli parziali, e il fuso AMBNA ne conterrà 10; dunque il fuso sta alla sfera come 10 a 96, o come 5 a 48, cioè come l'arco MN alla circonferenza.

Se l'arco MN è incommensurabile colla circonferenza, si proverà col medesimo ragionamento di cui sonosi già veduti parecchi esempi, che il fuso sta sempre alla sfera come l'arco MN sta alla circonferenza.

Corollario I. Due fusi stanno fra loro come i loro angoli rispettivi.

II. Si è veduto già che tutta la superficie della sfera è uguale ad otto triangoli trirettangoli (19); dunque se prendasi per unità l'aia di uno di questi triangoli, la superficie della sfera sarà rap-

presentata da 8. Posto ciò, la superficie del fuso il cui angolo è A sarà espressa da 2A (se tuttavia l'angolo A è valutato prendendo l'angolo retto per unità); perchè si ha 4 : A::8 : 2A. Qui dunque ci hanno due unità differenti; l'una per gli angoli, ed è l'angolo retto; l'altra per le superficie ed è il triangolo sferico trirettangolo, o quello di cui tutti gli angoli sono retti, e però i lati quadranti.

Scolio. L'unghia sferica compresa dai piani AMB, ANB sta al solido intiero della sfera come l'angolo A sta a quattro angoli retti. Imperocchè essendo uguali i fusi, le unghie sferiche sono medesimamente uguali; dunque due unghie sferiche stanno fra loro come gli angoli formati dai piani che le comprendono.

PROPOSIZIONE XXI. — *TEOREMA.*

Due triangoli sferici simmetrici sono uguali in superficie.

Siano ABC, DEF (fig. 237) due triangoli simmetrici, cioè che hanno i lati uguali, AB=DE, AC=DF, CB=EF e che intanto non possono essere soprapposti; dico che la superficie ABC è uguale alla superficie DEF.

Sia P il polo del cerchio minore che passerebbe pei tre punti A, B, C [1]; da questo punto siano condotti gli archi uguali (6) PA, PB, PC; al punto F facciasi l'angolo DFQ=ACP, l'arco FQ=CP, e congiungasi DQ, EQ.

I lati DF, FQ sono uguali ai lati AC, CP, l'angolo DFQ=ACP; dunque i due triangoli DFQ, ACP sono uguali in tutte le loro parti (12); dunque il lato DQ=AP, e l'angolo DQF=APC.

Nei triangoli proposti DFE, ABC, gli angoli DFE, ACB opposti ai lati uguali DE, AB sono uguali (11), e però se se ne tolgano gli angoli DFQ, ACP, uguali per costruzione, rimarrà l'angolo QFE uguale a PCB. D'altra parte i lati QF, FE sono uguali ai lati PC,

[1] Il cerchio che passa pei tre punti A, B, C o che è circoscritto al triangolo ABC, non può essere se non un cerchio minore della sfera; perchè se fosse un cerchio massimo, i tre lati AB, BC, AC sarebbero situati sopra un medesimo piano, ed il triangolo ABC ridurrebbesi ad uno dei suoi lati.

CB; dunque i due triangoli EQF, CPB sono uguali in tutte le loro parti; dunque il lato QE=PB, e l'angolo FQE=CPB.

Se si osservi ora che i triangoli DFQ, ACP, i quali hanno i loro lati rispettivamente uguali, sono in pari tempo isosceli, si vedrà ch'essi possono combaciare; perocchè, posto PA sul suo uguale QF, il lato PC cadrà sul suo uguale QD, e così i due triangoli si confonderanno in un solo; dunque essi sono uguali, e però la superficie DQF = APC. Per una simile ragione la superficie FQE =CPB e la superficie DQE=APB; dunque si ha DQF + FQE — DQE=APC+CPB—APB, ovvero DFE=ABC; dunque i due triangoli simmetrici ABC, DEF sono uguali in superficie.

Scolio. I poli P e Q potrebbero essere situati al di dentro dei triangoli ABC, DEF, bisognerebbe allora sommare i tre triangoli DQF, FQE, DQE, per comporne il triangolo DEF, e parimente bisognerebbe sommare i tre triangoli APC, CPB, APB per comporne il triangolo ABC; d'altra parte la dimostrazione e la conchiusione sarebbon sempre le stesse [1].

PROPOSIZIONE XXII. — *TEOREMA.*

Se due cerchi massimi si taglino comunque nell'emisfero, la somma dei due triangoli opposti è uguale al fuso che ha per angolo uno degli angoli opposti.

S' interseghino come si voglia nell' emisfero AOCBD (fig. 238) i due cerchi massimi AOB, COD; dico che la somma dei triangoli opposti AOC, BOD è uguale al fuso il cui angolo è BOD.

Imperocchè, prolungando gli archi OB, OD, nell'altro emisfero fino al loro incontro in N, OBN sarà una semicirconferenza,

[1] Essendo equilateri fra loro i due triangoli ABC, DEF, se si congiungano con linee rette i vertici di ciascun triangolo, si avranno due triangoli rettilinei equilateri, perchè essendo gli archi uguali, le corde saranno uguali; dunque il cerchio minore che passa pei tre vertici dell' uno è uguale a quello che passa pei tre vertici dell'altro. Da ciò si vede, che come si è preso il polo P, si poteva prendere il polo Q, senza la costruzione del Legendre, e se ne conchiudeva PA = QF.

al pari di AOB; togliendo da ambe le parti OB, si avrà $BN=AO$. Per una simile ragione si ha $DN=CO$ e $BD=AC$; dunque i due triangoli AOC, BDN hanno i tre lati uguali; d'altra parte la loro posizione è tale ch'ei sono simmetrici l'un dell'altro; dunque ei sono uguali in superficie (21), e la somma dei triangoli AOC, BOD è eguale al fuso OBNDO il cui angolo è BOD.

Scolio. È chiaro ben anco che le due piramidi sferiche che hanno per basi i triangoli AOC, BOD, prese insieme, equivalgono all'unghia sferica il cui angolo è BOD.

PROPOSIZIONE XXIII. — *TEOREMA*.

La superficie di un triangolo sferico qualunque ha per misura l'eccesso della somma dei suoi tre angoli su due angoli retti.

Sia ABC (fig. 239) il triangolo proposto; si prolunghino i lati fino a che incontrino il cerchio massimo DEFG, menato come si voglia fuori del triangolo. In virtù del teorema precedente, i due triangoli ADE, AGH, presi insieme, equivalgono al fuso il cui angolo è A e che ha per misura 2A (20); si avrà dunque $ADE+AGH=2A$; per una simile ragione $BGF+BID=2B$, $CIH+CFE=2C$. Ma la somma di questi sei triangoli eccede l'emisfero di due volte il triangolo ABC, d'altra parte l'emisfero è rappresentato da 4; dunque il doppio del triangolo ABC è uguale a $2A+2B+2C-4$, e per conseguenza $ABC=A+B+C-2$; dunque ogni triangolo sferico ha per misura la somma dei suoi angoli meno due angoli retti.

Corollario I. Quanti angoli retti saranno in questa misura, tanti triangoli trirettangoli, od ottave parti di sfere che sono l'unità di superficie (20), conterrà il triangolo proposto. Per esempio, se gli angoli sono uguali ciascuno a $\frac{4}{3}$ di un angolo retto, allora i tre angoli varranno insieme 4 angoli retti e il triangolo proposto sarà rappresentato da $4-2$; ovvero 2; dunque esso sarà uguale a due triangoli trirettangoli o alla quarta parte della superficie della sfera

II. Il triangolo sferico ABC è equivalente al fuso il cui angolo è $\frac{A+B+C}{2}-1$; parimente la piramide sferica la cui base e ABC equivale all'unghia sferica il cui angolo è $\frac{A+B+C}{2}-1$.

Scolio I. Mentre paragonasi il triangolo sferico ABC al triangolo trirettangolo, la piramide sferica che ha per base ABC si paragona colla piramide trirettangola, e ne risulta la medesima proporzione. L'angolo triedro al vertice della piramide si paragona similmente coll' angolo triedro al vertice della piramide trirettangola; infatti il paragone si stabilisce colla coincidenza delle parti. Ora se le basi delle piramidi coincidono, è evidente che le piramidi stesse coincideranno, al pari degli angoli triedri al loro vertice. Si deducono da ciò varie conseguenze.

1° Due piramidi triangolari sferiche stanno fra loro come le loro basi; e poichè una piramide poligona può dividersi in varie piramidi triangolari, ne segue che due piramidi sferiche qualunque stanno fra loro come i poligoni sferici che servono loro di base.

2° Gli angoli poliedri al vertice delle stesse piramidi stanno ugualmente nella proporzione delle basi; dunque per paragonare due angoli poliedri qualunque, bisogna porre i loro vertici al centro di due sfere uguali, e questi angoli poliedri staranno fra loro come i poligoni sferici intercetti fra le loro facce.

L'angolo al vertice della piramide trirettangola è formato da piani perpendicolari fra loro: quest'angolo, che può chiamarsi *angolo poliedro retto*, è assai proprio a servire di unità di misura agli altri angoli poliedri. Posto ciò, lo stesso numero che dà l'aia di un poligono sferico, darà la misura dell' angolo poliedro corrispondente. Per esempio, se l'aia del poligono sferico è $\frac{3}{4}$, cioè se è $\frac{3}{4}$ del triangolo trirettangolo, l'angolo poliedro corrispondente sarà ancora i $\frac{3}{4}$ dell' angolo poliedro retto.

Finalmente si noti l' analogia che ha la misura degli angoli poliedri con quella degli angoli rettilinei per mezzo degli archi descritti con raggi uguali dai vertici come centri, e intercetti fra i lati.

II. Questa proposizione si può anche enunciare così: *l'aia di un*

triangolo sferico sta alla superficie della sfera come l'eccesso della somma dei suoi angoli su due angoli retti sta ad otto angoli retti [1].

PROPOSIZIONE XXIV. — *TEOREMA.*

La superficie di un poligono sferico ha per misura la somma dei suoi angoli, meno il prodotto di due angoli retti pel numero dei lati del poligono meno due.

Da uno stesso vertice A (fig. 240) siano condotte a tutti gli altri vertici le diagonali AC, AD; il poligono ABCDE sarà diviso in tanti triangoli meno due quanti lati vi sono. Ma la superficie di ciascun triangolo ha per misura la somma dei suoi angoli meno due angoli retti, ed è chiaro che la somma degli angoli dei triangoli è uguale alla somma degli angoli del poligono; dunque la superficie del poligono è uguale alla somma dei snoi angoli diminuita di tante volte dne angoli retti quanti lati vi sono meno due.

Scolio. Sia s la somma degli angoli di un poligono sferico, n il numero dei suoi lati; supposto l'angolo retto per unità, la superficie del poligono avrà per misura $s-2(n-2)$ ovvero $s-2n+4$.

PROPOSIZIONE XXV. — *TEOREMA.*

Sia S il numero degli angoli poliedri di un poliedro, H il numero delle sue facce, A il numero delle sue costole; dico che si avrà sempre $S+H=A+2$.

Prendasi al di dentro del poliedro un punto dal quale si condurranno delle rette ai vertici di tutti i suoi angoli; s'immagini dipoi che dallo stesso punto come centro si descriva una superficie sferica che sia incontrata da tutte queste rette in altrettanti punti; congiungansi questi punti con archi di cerchi massimi in modo da formare sulla superficie della sfera dei poligoni corrispondenti in ugual numero colle facce del poliedro. Sia ABCDE (fig. 240) uno di questi poligoni e sia n il numero dei suoi lati; la sua superficie sarà $s-2n+4$, essendo s la somma degli angoli A, B, C, D, E. Se si valuti similmente la superficie di

[1] Così l'enuncia il Cavalieri che fu il primo a dimostrarla. Ved. *Directarium generale uranometricum*, *Bononiae*, 1632, pag. 316.

ciascuno degli altri poligoni sferici, e si sommino tutti insieme, se ne concluiderà che la loro somma, o la superficie della sfera rappresentata da 8, è uguale alla somma di tutti gli angoli dei poligoni meno due volte il numero dei loro lati; più 4 preso tante volte quante facce vi sono Ora siccome tutti gli angoli che si aggiustano attorno a un medesimo punto A valgono quattro angoli retti, la somma di tutti gli angoli dei poligoni è uguale a 4 preso tante volte quanti angoli poliedri ci sono; essa è dunque uguale a 4 S. Indi il doppio del numero dei lati AB, BC, CD, ec. è uguale al quadruplo del numero delle costole $o=4A$, poichè la stessa costola serve di lato a due facce; dunque si avrà $8=4S-4A+4H$; o, prendendo la quarta parte da ciascun numero, $2=S-A+H$; dunque $S+H=A+2$.

Corollario. Segue da ciò che *la somma degli angoli rettilinei che formano gli angoli poliedri di un poliedro è uguale a tante volte quattro angoli retti quante unità sono in* $S-2$, *essendo S il numero degli angoli poliedri.*

Imperocchè, se si considera una faccia, il numero dei cui lati è n, la somma degli angoli di questa faccia sarà $2n-4$ angoli retti. Ma la somma di tutti i $2n$, o il doppio del numero dei lati di tutte le facce, $=4A$, e 4 preso tante volte quante facce vi sono $=4H$; dunque la somma degli angoli di tutte le facce $=4A-4H$. Or, pel teorema or ora dimostrato, si ha $A-H=S-2$, e per conseguenza $4A-4A=4(S-2)$. Dunque *la somma degli angoli rettilinei ec.*

PROPOSIZIONE XXVI. — *TEOREMA.*

Di tutti i triangoli sferici formati con due lati dati e un terzo ad arbitrio, il maggiore è quello nel quale l' angolo compreso dai lati dati è uguale alla somma dei due altri angoli.

Si prolunghino i due lati dati AC, AB (fig. 272 e 273) fino a che s'incontrino in D; si avrà un triangolo sferico BCD nel quale l'angolo DBC sarà anche uguale alla somma dei due altri angoli BDC, BCD; poichè BCD + BCA essendo uguale a due angoli retti, al pari di CBA + CBD, si ha $BCD+BCA=CBA+CBD$: aggiungendo da ambe le parti $BDC=BAC$, si avrà $BCD+BCA+BDC=CBA+CBD+BAC$. Ora, per ipotesi, $BCA=CBA+BAC$; dunque $CBD=BCD+BDC$.

Tirisi BI che faccia l' angolo $CBI=BCD$, e per conseguenza $IBD=BDC$; i due triangoli IBC, IBD, saranno isosceli, e si avrà $IC=IB=ID$. Dunque, il punto I, medio di DC, è ad uguale distanza dai tre punti B, C, D; per una simile ragione il punto O, medio di AB, sarà ugualmente distante dai tre punti A, B, C.

Sia ora $CA'=CA$ (fig. 272) e l' angolo $BCA'>BCA$; se si congiunga A'B, e si prolunghino gli archi A'C, A'B, fino al loro incontro in D', l'arco D'CA' sarà

una semicirconferenza, al pari di DCA; dunque poichè si ha $CA'=CA$, si avrà pure $CD'=CD$. Ma nel triangolo CID', si ha $CI+ID'>CD'$; dunque $ID'>CD-CI$, o $ID'>ID$.

Nel triangolo isoscele CIB dividasi l'angolo del vertice I in due parti uguali mediante l'arco EIF che sarà perpendicolare sul punto medio di BC. Se prendasi un punto L, tra I ed E, la distanza BL, uguale ad LC, sarà minore di BI; perchè si può dimostrare, come nella prop IX, lib. I, part. I, che si ha $AL+LC<BI+IC$; prendendo dunque le metà da ambe le parti, si avrà $BL<BI$. Ma nel triangolo D'LC si ha $D'L>D'C-CL$, e a più forte ragione $D'L>DC-CI$, o $D'L>BI$; dunque $D'L>BI$. Adunque se si trova sull'arco EIF un punto ugualmente distante dai tre punti B, C, D, questo punto non potrebbe trovarsi che sul prolungamento di EI verso F. Sia I' il punto cercato, in modo che si abbia $D'I'=BI'=CI'$; i triangoli I'CB, I'BD', essendo isosceli, si avranno gli angoli uguali $I'BC=I'CB$, $I'BD'=I'D'B$, $I'CD'=I'D'C$. Ma gli angoli $D'BC+CBA'$ valgono due angoli retti, al pari di $D'CB+BCA'$; dunque

$$D'BI'+I'BC+CBA'=2,$$
$$BCI'-I'CD'+BCA'=2.$$

Addizionando le due somme e osservando che si ha $I'BC=BCI'$ e $D'BI'-I'CD'=BD'I'-I'D'C=CD'B=CA'B$, si avrà $2I'BC+CA'B+CBA'+BCA'=4$. Dunque $CA'B+CBA'+BCA'-2$ (misura dell'aia del triangolo A'BC) $=2-2\,I'BC$; in modo che si ha *aia* $A'BC=2-2$ *angolo* I'BC; similmente nel triangolo ABC, si avrebbe *aia* $ABC=2-2$ *angolo* IBC. Ora, si è dimostrato che l'angolo I'BC è maggiore di IBC; dunque l'aia A'BC è minore di ABC.

La medesima dimostrazione e la medesima costruzione avrebber luogo, se, prendendo sempre l'arco $CA'=CA$ (fig. 273), si facesse l'angolo $BCA'<BCA$; dunque ABC è il triangolo maggiore tra tutti quelli che hanno due lati dati e il terzo ad arbitrio.

Scolio I. Il triangolo ABC (fig. 241), il maggiore fra tutti quelli che hanno due lati dati CA, CB, può essere iscritto in un semicerchio nel quale la corda del terzo lato AB sarà il diametro; poichè essendo O il punto medio di AB, si è veduto che le distanze OC, OB sono uguali; dunque la circonferenza di cerchio minore descritta dal punto O come polo e coll'intervallo OB passerà pei tre punti A, B, C. Di più la retta BA è un diametro di questo cerchio minore; poichè il centro che dee trovarsi a un'ora nel piano del cerchio minore e nel piano dell'arco di cerchio massimo BOA (prop. 1, cor. 4), si troverà necessariamente nell'intersezione di questi due piani ch'è la retta BA, e così BA sarà un diametro.

II. Nel triangolo ABC, essendo l'angolo C uguale alla somma dei due altri A e B, ne segue che la somma dei tre angoli è doppia dell'angolo C. Ma questa somma è sempre maggiore di due angoli retti (19); dunque l'angolo C è maggiore di un retto.

III. Se prolunghinsi i lati CB, CA, fino al loro incontro in E, il triangolo BAE sarà uguale alla quarta parte della superficie della sfera. Perocchè l'angolo E=C=ABC+CAB; dunque i tre angoli del triangolo BAE equivalgono ai quattro ABC, ABE, CAB, BAE, la cui somma è uguale a quattro angoli retti; dunque (24) la superficie del triangolo BAE = 4 — 2 = 2, che è la quarta parte della superficie della sfera.

IV. Non sarebbevi luogo a *massimo*, se la somma dei due lati CA, CB fosse uguale o maggiore della semicirconferenza di un cerchio massimo. Perchè, dovendo essere il triangolo ABC iscritto in un semicerchio della sfera, la somma dei due lati CA, CB, sarà minore della semicirconferenza BCA (3), e per conseguenza minore della semicirconferenza di un cerchio massimo.

La ragione per la quale non ci ha *massimo*, quando la somma dei due lati dati è maggiore della semicirconferenza di un cerchio massimo, si è che allora il triangolo aumenta di più in più a misura che l'angolo compreso dai lati dati è maggiore; finalmente, quando questo angolo sarà uguale a due retti, i tre lati saranno in un medesimo piano e formeranno una intera circonferenza; il triangolo sferico diverrà dunque uguale all'emisfero, ma cesserà allora di essere triangolo.

PROPOSIZIONE XXVII. — *TEOREMA*.

Di tutti i triangoli sferici formati con un lato dato e un perimetro dato, il maggiore è quello nel quale i due lati non determinati sono uguali.

Sia AB (fig. 242) il lato dato comune ai due triangoli ACB, ADB, e sia AC+CB=AD+DB; dico che il triangolo isoscele ACB, nel quale AC = CB, è maggiore del non isoscele ADB.

Imperocchè, avendo questi triangoli la parte comune AOB, basta far vedere che il triangolo BOD è minore di AOC. L'angolo CBA uguale a CAB è maggiore di OAB, dunque il lato AO è maggiore di OB (21); prendasi OI = OB, si faccia OK = OD, e congiungasi KI; il triangolo OKI sarà uguale a DOB. Se si nieghi ora che il triangolo DOB o il suo uguale KOI sia minore di OAC, bisognerà che sia uguale o maggiore; nell'un caso e nell'altro, poichè il punto I è fra i punti A ed O, bisognerà che il punto K stia sopra OC prolungato, senza di che il triangolo OKI sarebbe contenuto nel triangolo CAO, e per conseguenza minore. Posto ciò, il più corto cammino da C in A essendo CA, si ha CK+KI + IA>CA. Ma CK=OD—CO, AI = AO — OB, KI = BD; dunque OD — CO + AO—OB+BD>CA, e riducendo, AD, CB+BD>CA, o AD+BD>AC+CB. Ora questa ineguaglianza è contraria all'ipotesi AD+BD=AC+CB, dunque il punto K non può cadere sul prolungamento di OC; dunque cade tra O e C, e per conseguenza il triangolo KOI, o il suo uguale ODB, è minore di ACO; dunque il triangolo

isoscele ACB è maggiore del non isoscele ADB di uguale base e di ugual perimetro.

Scolio. Queste due ultime proposizioni sono analoghe alle proposizioni I e III dell'appendice al lib. IV, part. I; così, se ne possono dedurre per rapporto ai poligoni sferici le conseguenze che han luogo pei poligoni rettilinei.

Eccone le principali:

1° *Di tutti i poligoni sferici isoperimetri e di uno stesso numero di lati, il maggiore è un poligono equilatero.*

La stessa dimostrazione che per la prop. II dell'appendice citato.

2° *Di tutti i poligoni sferici formati con lati dati e un ultimo ad arbitrio, il maggiore è quello che si può iscrivere in un semicerchio il cui diametro sarà la corda del lato non determinato.*

La dimostrazione si deduce dalla prop. XXVI, come si è veduto nella prop. IV del citato appendice; bisogna, per l'esistenza del *massimo* che la somma dei lati dati sia minore della semicirconferenza di un cerchio massimo.

3° *Il maggiore dei poligoni sferici formati con lati dati, è quello che si può iscrivere in un cerchio della sfera.*

La stessa dimostrazione dell'appendice citato.

4° *Il maggiore dei poligoni sferici che hanno il medesimo perimetro e lo stesso numero di lati, è quello che ha i suoi angoli e i suoi lati uguali.*

Questo risulta dai corollari 1 e 3 che precedono.

Nota. Tutte le proposizioni di *massimo* che concernono i poligoni sferici si applicano agli angoli poliedri dei quali questi poligoni sono la misura.

APPENDICE AI LIBRI II E III.

I poliedri regolari.

PROPOSIZIONE PRIMA. — *TEOREMA.*

Non ci ponno essere che cinque poliedri regolari.

Imperocchè sonosi definiti *poliedri regolari* quelli le cui facce sono tutte poligoni regolari uguali, e i cui angoli poliedri sono tutti uguali fra loro. Queste condizioni non ponno aver luogo che in un picciol numero di casi.

1.° Se le facce sono triangoli equilateri, si può ben formare ciascun angolo poliedro con tre angoli di questi triangoli, o con quattro o con cinque; di qui nascono tre poliedri regolari che sono il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro, cioè di quattro, di otto e di venti facce. Non se ne può formare un numero maggiore con triangoli equilateri, poichè sei angoli di questi triangoli valgono quattro angoli retti, e non possono formare angolo poliedro (28,1).

2.° Se le facce sono quadrati, si ponno riunire i loro angoli a tre a tre; e di qui risulta l'esaedro o cubo.

Quattro angoli di quadrati valgono quattro angoli retti e non possono formare angolo poliedro.

3.° Finalmente, se le facce sono pentagoni regolari, si potranno ancora riunire i loro angoli a tre a tre; e ne risulterà il dodecaedro regolare.

Non si può andare più oltre; perchè tre angoli di esagoni regolari valgono quattro angoli retti, e tre di ettagoni ancora più.

Adunque non ci possono essere che cinque poliedri regolari, tre formati con triangoli equilateri, uno con quadrati, e uno con pentagoni.

Scolio. Si proverà nella proposizione che segue che questi cinque poliedri esistono realmente, e che se ne ponno determinare tutte le dimensioni quando si conosce una delle sue facce.

PROPOSIZIONE II. — *PROBLEMA.*

Data una delle facce di un poliedro regolare, o solamente il suo lato, costruire il poliedro.

Questo problema ne presenta cinque che verremo successivamente risolvendo.

Costruzione del tetraedro.

Sia ABC (fig. 243) il triangolo equilatero che dee essere una delle facce del tetraedro; al punto O centro di questo triangolo, si elevi OS perpendicolare al piano ABC; si termini questa perpendicolare al punto S, in modo che AS=AB congiungasi SB, SC, e la piramide SABC sarà il tetraedro richiesto.

Perocchè, a cagione delle distanze uguali OA, OB, OC, le oblique SA, SB, SC, si allontanano ugualmente dalla perpendicolare SO, e sono uguali. L'una di esse SA=AB; dunque le quattro facce della piramide SABC sono triangoli uguali al triangolo dato ABC. D'altra parte gli angoli triedri di questa piramide sono uguali fra loro, poichè ciascuno è formato cogli stessi tre angoli rettilinei uguali; dunque questa piramide è un tetraedro regolare.

Costruzione dell' esaedro.

Sia ABCD (fig. 244) un quadrato dato; sulla base ABCD costruiscasi un prisma retto la cui altezza AE sia uguale al lato AB. È chiaro che le facce di questo prisma sono quadrati uguali, e che i suoi angoli triedri sono fra loro oguali, essendo formato ciascuno da tre angoli retti; dunque questo prisma è un esaedro regolare o cubo.

Costruzione dell' ottaedro.

Sia AMB (fig. 245) un triangolo equilatero dato; sul lato AB si descriva il quadrato ABCD; al punto O, centro di questo quadrato, si elevi sul suo piano la perpendicolare TS, terminata da una parte e dall'altra in T e S, in modo che OT = OS = AO; si congiunga dipoi SA, SB, TA, ec. e si avrà un poliedro SABCDT, composto da due piramidi quadrangolari SABCD, TABCD, addossate per la loro base comune ABCD; questo poliedro sarà l'ottaedro regolare cercato.

Infatti, il triangolo AOS è rettangolo in O, come pure il triangolo AOD; i

lati AO, OS, OD sono uguali; dunque questi triangoli sono uguali; dunque AS = AD. Parimente si dimostrerà che tutti gli altri triangoli rettangoli AOT, BOS, COT, ec. sono uguali al triangolo OAD; dunque tutti i lati AB, AS, AT, ec. sono uguali fra loro, e però il poliedro SABCDT è compreso da otto triangoli uguali al triangolo eqnilatero dato ABM. Dico di più che gli angoli tetraedri di questo poliedro sono uguali fra loro, per esempio, l'angolo S è uguale all'angolo B.

Imperocchè è visibile che il triangolo SAC è uguale al triangolo DAC, e che così l'angolo ASC è retto; dunque la figura SATC è un quadrato uguale al quadrato ABCD. Ma se si paragona la piramide BASCT alla piramide SABCD, la base ASCT della prima si può situare sulla base ABCD della seconda; allora il punto O essendo un centro comune, l'altezza OB della prima coinciderà coll'altezza OS della seconda, e le due piramidi si confonderanno in una sola; dunque l'angolo tetraedro S è uguale all'angolo tetraedro B; dunque il poliedro SABCDT è un ottaedro regolare.

Scolio. Se tre rette uguali AC, BD, ST, sono perpendicolari fra loro e si tagliano nei loro punti di mezzo, le estremità di queste rette saranno i vertici di un ottaedro regolare.

Costruzione del dodecaedro.

Sia ABCDE (fig. 246) un pentagono regolare dato, siano ABP, CBP, due angoli rettilinei uguali all'angolo ABC; con qoesti angoli rettilinei si formi l'angolo triedro B, e si determini per la proposizione XXV, libro I, parte II, l'inclinazione scambievole di due di questi piani, inclinazione che chiamerò K. Si formino similmente ai punti C, D, E, A degli angoli triedri uguali all'aogolo triedro B, e situati della stessa maniera: il piano CBP sarà lo stesso col piano BCG, perchè essi sono inclinati entrambi della stessa qnantità K sul piano ABCD. Si può dunque nel piano PBCG descrivere il pentagono BCGFP uguale al pentagono ABCDE. Se si farà lo stesso in ciascuoo degli altri piani CDI, DEL, ec. si avrà una superficie convessa PFGH, ec. composta da sei pentagoni regolari uguali e inclinati ciascuno sul suo adiacente della stessa quantità K. Sia *pfgh*, ec. una seconda superficie uguale a PFGH, ec.; dico che qoeste due superficie possono essere riunite in modo da non formare che una sola superficie convessa continua. In fatti, l'angolo *opf*, per esempio, si può riunire ai due angoli OPB, BPF, per fare un angolo triedro P uguale all'angolo B; e in questa riunione non si altererà per nulla l'inclinazione dei piani BPF, BPO, perchè questa inclinazione è tale quale bisogna per la formazione dell'angolo triedro. Ma in quella che l'angolo triedro P si forma, il lato *pf* si applicherà sul suo uguale PF, e al punto F si troveranno riuniti tre angoli rettilinei PFG, *pfe*, *efg*, che formeranno un angolo triedro uguale a ciascuno degli angoli già formati; questa riunione non farà nulla cangiare nè allo stato dell'an-

golo P, nè a quello della superficie *efgh*, ec.; perocchè i piani PFG, *efp*, già riuniti in P hanno fra loro la conveniente inclinazione K, come pure i piani *efg*, *efp*. Continuando così di mano in mano, si vede che le due superficie si aggiusteranno scambievolmente l'una coll'altra, per non formare che una sola superficie continua rientrante in sè stessa; questa superficie sarà quella di un dodecaedro regolare; poich'essa è composta di dodici pentagoni regolari uguali, e tutti i suoi angoli triedri sono uguali fra loro.

Costruzione dell'icosaedro.

Sia ABC (fig. 247) una delle sue facce; bisogna da prima formare un angolo pentaedro con cinque piani uguali al piano ABC, e ugualmente inclinati ciascuno sul suo adiacente. [1] A tal uopo, sul lato B'C', uguale a BC, facciasi il pentagono regolare B'C'H'I'D'; al centro di questo pentagono si elevi sul suo piano la perpendicolare, che si terminerà in A' in modo che B'A'=B'C'; congiungasi, A'C', A'H', A'I', A'D', e l'angolo pentaedro A', formato dai piani B'A'C', C'A'H', ec. sarà l'angolo pentaedro richiesto. Perocchè le oblblique A'B', A'C', ec. sono uguali, e l'una d'esse A'B' è uguale al lato B'C'; dunque tutti i triangoli B'A'C', C'A'H', ec. sono uguali fra loro e al triangolo dato ABC.

È manifesto d'altra parte che i piani B'A'C', C'A'H', ec. sono ugualmente inclinati, ciascuno sul suo adiacente; perchè gli angoli triedri B', C', ec. sono uguali fra loro, essendo formato ciascuno da due angoli di triangoli equilateri e uno di pentagono regolare. Chiamiamo K l'inclinazione dei due piani ove sono gli angoli uguali, inclinazione che si può determinare per la proposizione XXV lib. 1, part. II; l'angolo K sarà nello stesso tempo l'inclinazione di ciascuno dei piani che compongono l'angolo pentaedro A' sul suo adiacente.

Posto ciò, se si facciano ai punti A, B, C tre angoli pentaedri uguali ciascuno all'angolo A', si avrà una superficie convessa DEFG, ec. composta da dieci triangoli equilateri, dei quali ciascuno sarà inclinato sul suo adiacente della quantità K; e gli angoli D, E, F, ec. del suo contorno riuniranno alternativamente tre e due angoli di triangoli equilateri. S'immagini una seconda superficie uguale alla superficie DEFG, ec. queste due superficie potranno adattarsi l'una sull'altra, congiungendo ciascun angolo triedro dell'una a un angolo diedro dell'altra; e siccome i piani di questi angoli hanno già fra di loro l'inclinazione K necessaria per formare un angolo pentaedro uguale all'angolo A, nulla sarà cangiato in questa riunione allo stato di ciascuna superficie in particolare, e l'insieme delle due superficie formerà una sola superficie conti-

[1] Quando un angolo poliedro ha tutti gli angoli rettilinei uguali e tutti gli angoli diedri uguali si chiama regolare. Due angoli poliedri regolari composti di angoli rettilinei uguali e nello stesso numero possono sempre combaciare e non vi può aver luogo ad uguaglianza per simmetria.

nua, composta di venti triangoli equilateri. Questa superficie sarà quella dell' icosaedro regolare, perchè d'altra parte tutti gli angoli pentaedri sono ugnali fra loro.

PROPOSIZIONE III. — *PROBLEMA.*

Trovare un angolo diedro di un poliedro regolare.

Quest' angolo deduccsi immediatamente dalla costruzione data or ora dei cinque poliedri regolari; al che è mestieri aggiungere la proposizione XXV, lib. 1, parte II, per la quale dati i tre angoli rettilinei che formano nn angolo triedro, se ne determina uno degli angoli diedri.

Nel tetraedro. (fig. 243) Ciascun angolo triedro è formato da tre angoli di triangoli equilateri; bisogna dunque cercare pel problema citato, l' angolo diedro che due di questi piani fanno tra loro; quest' angolo diedro sarà quello di due facce adiacenti del tetraedro.

Nell'esaedro. (fig. 244) Ciascun angolo diedro è nn angolo retto.

Nell' ottaedro. (fig. 245) Si formi un angolo triedro con due angoli di triangoli eqnilateri e un angolo retto; l'inclinazione dei due piani ove sono gli angoli dei triangoli sarà quella di due facce adiacenti dell' ottaedro.

Nel dodecaedro (fig. 246). Ciascun angolo triedro è formato con tre angoli di pentagoni regolari; adunque un angolo diedro di questo angolo, sarà qnello di due facce adiacenti del dodecaedro.

Nell'icosaedro (fig. 247). Si formi un angolo triedro con due angoli di triangoli eqnilateri e un angolo di pentagono regolare; l' inclinazione dei due piani ove sono gli angoli dei triangoli sarà quella di due facce adiacenti dell' icosaedro.

PROPOSIZIONE IV. — *PROBLEMA.*

Dato il lato di un poliedro regolare, trovare il raggio della sfera iscritta e quello della sfera circoscritta al poliedro.

Primieramente bisogna dimostrare che ogni poliedro può essere iscritto nella sfera, e che può esserle circoscritto.

Sia AB (fig. 248) il lato comune a dne facce adiacenti; siano C ed E i centri di queste due facce, e CD, ED le perpendicolari abbassate da questi centri sul lato comune AB, le quali cadranno al punto D, medio di questo lato. Le due perpendicolari CD, DE fanno tra loro un angolo noto, ch'è uguale all'inclinazione delle due facce adiacenti, determinata pel problema precedente. Ora, se

nel piano CDE, perpendicolare ad AB, si menino su CD ed ED le perpendicolari indefinite CO ed EO, che s'incontrano in O, dico che il punto O sarà il centro della sfera iscritta e quello della sfera circoscritta; essendo OC il raggio della prima, ed OA quello della seconda.

In fatti, poichè le apoteme CD, DE sono uguali e l'ipotenusa DO comune, il triangolo rettangolo CDO è uguale al triangolo rettangolo ODE, e la perpendicolare OC è uguale alla perpendicolare OE. Ma essendo AB perpendicolare al piano CDE, il piano ABC è perpendicolare a CDE (18, 1), o CDE ad ABC; d'altra parte CO, nel piano CDE è perpendicolare a CD, intersezione comune dei piani CDE, ABC, dunque CO (19, 1) è perpendicolare al piano ABC. Per la medesima ragione EO è perpendicolare al piano ABE; dunque le due perpendicolari CO, EO, condotte ai piani di due facce adiacenti dai centri di queste facce s'incontrano in uno stesso punto O e sono uguali. Supponiamo ora che ABC ed ABE rappresentino due altre facce adiacenti qualunque, l'apotema CD rimarrà sempre della stessa grandezza, come pure l'angolo CDO, metà di CDE; dunque il triangolo rettangolo CDO e il suo lato CO saranno uguali per tutte le facce del poliedro; dunque, se dal punto O come centro e col raggio OC si descriva una sfera, questa sfera toccherà tutte le facce del poliedro nei loro centri (perchè i piani ABC, ABE saranno perpendicolari all'estremità del raggio), e la sfera sarà iscritta nel poliedro, o il poliedro circoscritto alla sfera.

Si congiungano OA, OB; essendo CA = CB, le due obblique OA, OB, allontanandosi ugualmente dalla perpendicolare, saranno uguali; lo stesso avverrà di due altre rette qualunque condotte dal centro O alle estremità di uno stesso lato; dunque tutte queste rette sono uguali fra loro; dunque se dal punto O come centro e col raggio OA si descriva una superficie sferica, questa superficie passerà per i vertici di tutti gli angoli poliedri, e la sfera sarà circoscritta al poliedro o il poliedro iscritto nella sfera.

Posto ciò, la soluzione del problema proposto non presenta più alcuna difficoltà, e può effettuarsi come segue.

Dato il lato di una faccia del poliedro, si descriva questa faccia, e sia CD la (fig. 249) sua apotema. Si trovi pel probleme precedente l'inclinazione di due facce adiacenti del poliedro, e facciasi l'angolo CDE uguale a questa inclinazione. Si prenda DE=CD, conducansi CO ed EO perpendicolari a CD ed ED; queste due perpendicolari s'incontreranno in un punto O, e CO sarà il raggio della sfera iscritta nel poliedro.

Sul prolungamento di DC prendasi CA uguale al raggio del cerchio circoscritto a una faccia del poliedro, e OA sarà il raggio della sfera circoscritta a questo medesimo poliedro.

Imperocchè i triangoli rettangoli CDO, CAO della fig. 249 sono uguali ai triangoli dello stesso nome nella fig. 248: dunque mentre CD e CA sono i raggi dei cerchi iscritto e circoscritto a una faccia del poliedro, OC ed OA sono i raggi delle sfere iscritta e circoscritta al medesimo poliedro.

Scolio. Si possono dedurre dalle proposizioni precedenti parecchie conseguenze.

1° Ogni poliedro regolare può essere diviso in tante piramidi regolari quante facce ha il poliedro: il vertice comune di queste piramidi sarà il centro del poliedro, ch'è nello stesso tempo quello delle sfere iscritta e circoscritta.

2.° La solidità di un poliedro regolare è uguale alla sua superficie moltiplicata per la terza parte del raggio della sfera iscritta.

3° Due poliedri regolari dello stesso nome sono due poliedri simili, e le loro dimensioni omologhe sono proporzionali; dunque i raggi delle sfere iscritte o circoscritte sono fra loro come i lati di questi poliedri.

4° Se s'iscrive un poliedro regolare in una sfera, i piani menati dal centro lungo i differenti lati divideranno la superficie della sfera in tanti poligoni sferici uguali e simili quante facce ha il poliedro.

LIBRO IV

I TRE CORPI ROTONDI

DEFINIZIONI

I. Si chiama *cilindro retto* il solido prodotto dalla rivoluzione di un rettangolo che s' immagina rotare intorno a un suo lato immobile [1].

Così, girando il rettangolo ABCD (fig. 250) intorno al suo lato immobile AB, i lati AD, BC, rimanendo sempre perpendicolari ad AB, descriveranno in questo movimento due piani circolari uguali DHP, CGQ, che chiamansi le *basi del cilindro*, e il lato CD ne descrive la *superficie convessa.*

La retta immobile AB chiamasi *l' asse del cilindro*.

Qualunque sezione KLM, fatta nel cilindro retto perpendicolarmente all' asse, è un cerchio uguale a ciascuna delle basi; perocchè mentre il rettangolo ABCD rota intorno ad AB, la retta IK,

[1] Generalmente il cilindro è quel solido generato da una retta EF (fig. 250) assoggettata a rotare parallelamente a sè medesima lungo la circonferenza di un cerchio FGC. Considerando la generatrice in due posizioni differenti EF, HG, se dal centro B della base si tiri BA uguale e parallela ad FE, si avranno i due parallelogrammi EABF, ABGH, i quali dànno AE = BF ed AH = BG. Adunque il punto E nel suo moto descriverà una circonferenza di cerchio, uguale a quella della base, e così il cilindro sarà terminato da due basi circolari uguali e parallele, perchè l' angolo EAH ha i suoi lati paralleli a quelli dell' angolo FBG e rivolti nel medesimo senso. La retta AB è l' *asse* del cilindro; quando essa è perpendicolare il cilindro è *retto*; altrimenti il cilindro è *obbliquo* (fig. 275). L' altezza del cilindro è sempre la distanza delle due basi parallele.

Del solo cilindro retto si occupa la geometria elementare.

perpendicolare ad AB, descrive un piano circolare uguale alla base e questo piano altro non è che la sezione fatta perpendicolarmente all'asse dal punto I.

Ogni sezione PQGH, fatta secondo l'asse, è un rettangolo doppio del rettangolo generatore ABCD.

II. Dicesi *cono retto* il solido prodotto dalla rivoluzione di un triangolo rettangolo che s'immagina rotare attorno un suo cateto immobile [1].

Così, rotando il triangolo rettangolo SAB (fig 251) attorno il suo cateto immobile SA, il lato AB descrive in questo movimento un piano circolare BDCE, che si chiama la *base del cono*, e l'ipotenusa SB ne descrive la superficie convessa.

Il punto S chiamasi il *vertice del cono*, SA l'*asse* o l'*altezza*, ed SB il *lato* o l'*apotema*.

Ogni sezione HKFI, fatta perpendicolarmente all'asse è un cerchio; ogni sezione SDE, fatta secondo l'asse, è un triangolo isoscele doppio del triangolo generatore SAB.

III. Se dal cono SCDB si tolga, con una sezione parallela alla base, il cono SFKH, il solido che rimane CBHF chiamasi *cono tronco* o *tronco conico*.

Si può supporre ch'esso è descritto dalla rivoluzione del trapezio ABHG, di cui gli angoli A e G sono retti, attorno il lato AG. La retta immobile AG si chiama l'*asse* o l'*altezza del tronco*; i cerchi BDC, HFK ne sono le *basi*, e BH ne è il *lato*.

IV. Due cilindri o due coni sono *simili* quando i loro assi stanno fra loro come i diametri delle loro basi.

V. Se nel cerchio ACD (fig. 252) che serve di base a un cilindro retto, s'iscrive un poligono ABCDE, e sulla base ABCDE si eleva un prisma retto uguale in altezza al cilindro, il prisma dicesi *iscritto nel cilindro*, o il cilindro *circoscritto al prisma*.

[1] L'idea generale del cono si è quella di un solido generato da una retta SA (fig. 275) assoggettata a rotare intorno a un suo estremo immobile S lungo la circonferenza di un cerchio AnB. L'*asse* del cono è sempre la retta Sm che congiunge il vertice S col centro m della base; quando quest'asse è perpendicolare alla base il cono è *retto*, quando non è, il cono è *obbliquo*. L'altezza del cono è sempre la distanza del vertice S dalla base.

Il solo cono retto forma oggetto della geometria elementare.

È chiaro che le costole AF, BG, CH, ec. del prisma, essendo perpendicolari al piano della base, sono comprese nella superficie convessa del cilindro; dunque il prisma e il cilindro si toccano secondo queste costole.

VI. Parimente, se ABCD (fig. 253) è un poligono circoscritto alla base di un cilindro retto, e sulla base ABCD si costruisce un prisma retto di uguale altezza col cilindro, il prisma dicesi *circoscritto al cilindro*, o il cilindro *iscritto nel prisma*.

Siano M, N, ec. i punti di contatto dei lati AB, BC, ec. e siano elevati dai punti M, N, ec. le perpendicolari MX, NY, ec. al piano della base; è chiaro che queste perpendicolari staranno insieme nella superficie del cilindro e in quella del prisma circoscritto; esse dunque saranno le loro rette di contatto.

LEMMI PRELIMINARI SULLE SUPERFICIE.

I

Una superficie piana è minore di ogni altra superficie terminata allo stesso contorno.

Per esempio, la superficie piana OABCD (fig. 254) è minore di ogni altra superficie PABCD la quale abbia le medesime estremità.

Questa proposizione è chiara abbastanza perchè si possa comprendere nel numero degli assiomi; perocchè si potrebbe supporre che il piano è fra le superficie quel medesimo che la linea retta è fra le linee: la linea retta è il più corto cammino da un punto ad un altro, così pure il piano è la superficie più piccola fra tutte quelle che hanno un medesimo contorno. Frattanto, siccome voglionsi ridurre gli assiomi al minor numero possibile, ecco un ragionamento il quale non lascerà dubbio alcuno su questa proposizione.

Essendo la superficie una estensione in lunghezza e larghezza, non può concepirsi che una superficie sia maggiore di un' altra, se le dimensioni della prima non eccedano in alcuni sensi quelle

della seconda, e se si trovano le dimensioni di una superficie per ogni senso minori delle dimensioni di un'altra superficie, è chiaro che la prima superficie sarà minore della seconda. Ora, per qualunque senso si faccia passare il piano BPD, il quale taglierà il piano secondo BD, e la superficie curva secondo BPD, la retta BD sarà sempre minore di BPD; dunque la superficie piana OABCD è minore della superficie circondante PABCD.

II

Ogni superficie convessa è minore di un' altra superficie qualunque che inviluppi la prima appoggiandosi sul medesimo contorno.

Ripeteremo qui che intendiamo per *superficie convessa* una superficie che non può essere incontrata da una linea retta in più di due punti; e per tanto è possibile che una retta si applichi esattamente in un certo senso sopra una superficie convessa; se ne veggono esempi nelle superficie del cono e del cilindro. Anche osserveremo che la denominazione di superficie convessa non si limita alle sole superficie curve, ma comprende altresì le superficie *poliedre* o composte di più piani, come pure le superficie parte curve e parte piane.

Posto ciò, sia la superficie convessa OABCD (fig. 255); se ella non è la minore di tutte quelle che l'inviluppano e che hanno il medesimo contorno ABCD, sia fra di queste PABCD la superficie più piccola, la quale sarà al più uguale ad OABCD. Da un punto qualunque O, facciasi passare un piano il quale tocchi la superficie PABCD e la parte che ne sottrarrà sarà maggiore del piano terminato alla stessa superficie (lem. 1); dunque, conservando il rimanente della superficie PABCD, potrebbesi sostituire il piano alla parte sottratta, ed avrebbesi una nuova superficie la quale inviluppercbbe sempre OABCD, e sarebbe minore di PABCD.

Ma quest'ultima, per la supposizione è la minore di tutte; dunque questa supposizione non può stare, e però la superficie con-

vessa OABCD è minore di ogni superficie che inviluppasse OABCD e che fosse terminata allo stesso contorno ABCD.

Scolio. Con un ragionamento intieramente simile si dimostrerà,

1° Che, se una superficie convessa terminata da due contorni ABC, DEF (fig. 256) è inviluppata da un'altra superficie qualunque terminata agli stessi contorni, la superficie inviluppata sarà la minore delle due.

2° Che, se una superficie convessa AB (fig. 257) è inviluppata da ogni parte da un'altra superficie MN, sia che abbiano dei punti delle linee, o dei piani comuni, sia che non abbiano se non un sol punto di comune, la superficie inviluppata sarà sempre minore della superficie inviluppante.

In fatti fra di queste non ve ne può essere alcuna che sia la minore di tutte, perocchè in tutti i casi potrebbesi sempre menare il piano CD tangente alla superficie convessa, il qual piano sarebbe minore della superficie CMD (lem. 1); e così la superficie CND sarebbe minore di MN, il che è contrario alla supposizione che MN è la minore di tutte. Adunque la superficie convessa AB è minore di tutte quelle che l'inviluppano.

PROPOSIZIONE PRIMA. — *TEOREMA.*

La solidità di un cilindro retto è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza [1].

Sia CA (fig. 258) il raggio della base del cilindro dato, H la sua altezza, rappresentiamo con *sup.* CA la superficie del cerchio di

[1] Un cilindro è in sostanza un prisma la cui base è un poligono regolare d'infiniti lati, sicchè le sue proprietà sono le stesse che quelle del prisma, cioè *un cilindro, sia retto, sia obbliquo ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza — La superficie convessa di un cilindro retto ha per misura la circonferenza della sua base per la sua altezza — La superficie convessa di un cilindro obbliquo ha per misura il lato, cioè la retta generatrice moltiplicata per la linea che nasce da una sezione fatta con un piano perpendicolare all' asse* (fig. 275). Questa linea è un *ellisse*, e però non si sa misurare colla geometria

cui CA è il raggio; dico che la solidità del cilindro sarà *sup.* CA×H. Imperocchè, se *sup.* CA×H non è la misura del cilindro dato, questo prodotto sarà la misura di un cilindro maggiore o minore. E da prima supponiamo che sia la misura di un cilindro minore; per esempio, del cilindro della cui base CD è il raggio e di cui H è l'altezza.

Si circoscriva al cerchio che ha per raggio CD un poligono regolare GHI i cui lati non incontrino la circonferenza di cui CA è il raggio (10, 4, part. 1); s'immagini poi un prisma retto che abbia per base il poligono CHI, e per altezza H, il qual prisma sarà circoscritto al cilindro della cui base CD è il raggio. Posto ciò, la solidità del prisma (14, 1) è uguale alla sua base GHI moltiplicata per l'altezza H; la base GHI è minore del cerchio che ha per raggio CA; dunque la solidità del prisma è minore di *sup.* CA×H. Ma *sup.* CA×H è, per ipotesi, la solidità del cilindro iscritto nel prisma; dunque il prisma sarebbe minore del cilindro; ora, per lo contrario, il cilindro è minore del prisma, perchè vi è contenuto; dunque è impossibile che *sup.* CA×H sia la misura del cilindro la cui base ha per raggio CD, e l'altezza sia H; o, in termini più generali, *il prodotto della base di un cilindro per la sua altezza non può misurare un cilindro minore.*

Dico in secondo luogo che questo medesimo prodotto non può misnrare un cilindro maggiore. Imperocchè, per non moltiplicare le figure, sia CD il raggio della base del cilindro dato, e sia, se è possibile, *sup.* CD×H la misura di un cilindro maggiore, per esempio, del cilindro la cui base ha per raggio CA e di cui H è l'altezza.

Se si fa la stessa costruzione che nel primo caso, il prisma circoscritto al cilindro dato avrà per misura GHI × H; l'aia CHI è maggiore di *sup.* CD; dunque la solidità del prisma di cui si tratta è maggiore di *sup.* CD×H; il prisma sarebbe dunque mag-

elementare — *Le superficie convesse, e le superficie intiere dei cilindri simili stanno fra loro come i quadrati degli assi o come i quadrati dei raggi delle basi.*
Ma però è a dire del cilindro quel medesimo che abbiamo detto del cerchio nella nota a pag. 164; cioè che negli elementi, in cambio d'introdurre queste idee d'infinitamente piccoli, che comunque esatte, sono pure estranee ai metodi della geometria, è meglio di seguire le dimostrazioni per assurdo.

giore del cilindro di uguale altezza e che ha per base *sup*. CA. Ora, all'incontro, il prisma è minore del cilindro, perchè vi è contenuto; dunque *è impossibile che la base di un cilindro moltiplicata per la sua altezza sia la misura di un cilindro maggiore.*

Dunque finalmente la solidità di un cilindro retto è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario I. I cilindri della medesima altezza stanno fra loro come le rispettive basi, e i cilindri della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.

II. Due cilindri equivalenti qualunque hanno le basi in ragion reciproca delle altezze.

III. I cilindri simili stanno come i cubi delle altezze, o come i cubi dei diametri delle basi. Imperocchè le basi stanno fra loro come i quadrati dei loro diametri; e poichè i cilindri sono simili, i diametri delle basi stanno come le altezze (def. 4); dunque le basi stanno come i quadrati delle altezze, e però le basi moltiplicate per le altezze, o i cilindri stessi, stanno fra loro come i cubi delle altezze.

Scolio. Sia R il raggio della base di un cilindro, H la sua altezza, la superficie della base sarà πR^2 (12, 4, part. 1), e la solidità del cilindro sarà $\pi R^2 \times H$, ovvero $\pi R^2 H$.

PROPOSIZIONE II. — *LEMMA.*

La superficie convessa del cilindro è maggiore della superficie convessa di ogni prisma iscritto, e minore della superficie convessa di ogni prisma circoscritto.

Imperocchè la superficie convessa del cilindro e quella del prisma iscritto ABCDEF (fig. 252) possono essere considerate come aventi la stessa lunghezza, perchè ogni sezione fatta nell'una e nell'altra parallelamente ad AF è uguale ad AF; e se per avere le larghezze di queste superficie, le si taglino con piani paralleli alla base o perpendicolari alla costola AF, le sezioni saranno uguali, l'una alla circonferenza della base, l'altra al contorno del poligono ABCDE minore di questa circonferenza; dunque, poichè a lun-

ghezza uguale, la larghezza della superficie cilindrica è maggiore di quella della superficie prismatica, ne segue che la prima superficie è maggiore della seconda.

Con un ragionamento interamente simile si proverà che la superficie convessa del cilindro è minore di quella di ogni prisma circoscritto BCDH (fig. 253).

PROPOSIZIONE III. — *TEOREMA.*

La superficie convessa di un cilindro retto è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza.

Sia CA (fig. 258) il raggio della base del cilindro dato, H la sua altezza; se si dinota con *circ.* CA la circonferenza che ha per raggio CA, dico che *circ.* CA$\times$H sarà la superficie convessa di questo cilindro. Perocchè, se nieghisi questa proposizione, bisognerà che *circ.* CA$\times$H sia la superficie di un cilindro maggiore o minore; e da prima supponiamo che sia la superficie di un cilindro minore; per esempio, del cilindro la cui base ha per raggio CD e di cui H sia l'altezza.

Si circoscriva al cerchio il cui raggio è CD un poligono regolare GHI i cui lati non incontrino la circonferenza che ha per raggio CA; indi s'immagini un prisma retto che abbia per altezza H, e per base il poligono GHI. La superficie convessa di questo prisma sarà uguale al contorno del poligono GHI moltiplicato per l'altezza H (28, 2); questo contorno è minore della circonferenza che ha per raggio CA; dunque la superficie convessa del prisma è minore di *circ.* CA $\times$ H. Ma *circ.* CA $\times$ H è, per ipotesi, la superficie convessa del cilindro la cui base ha per raggio CD, il qual cilindro è iscritto nel prisma; dunque la superficie convessa del prisma sarebbe minore di quella del cilindro iscritto. Ora, al contrario, in virtù della proposizione precedente, ella dev'esser maggiore; dunque l'ipotesi dalla quale si è partito è assurda: dunque 1° *la circonferenza della base di un cilindro retto moltiplicato per la sua altezza non può misurare la superficie convessa di un cilindro minore.*

Dico in secondo luogo che questo stesso prodotto non può misurare la superficie di un cilindro maggiore. Imperocchè per non cangiar figura, sia CD il raggio della base del cilindro dato, e sia, se è possibile *circ.* CD$\times$H la superficie convessa di un cilindro che, colla medesima altezza, abbia per base un cerchio maggiore; per esempio, il cerchio il cui raggio è CA. Si farà la medesima costruzione che nella prima ipotesi, e la superficie convessa del prisma sarà sempre uguale al contorno del poligono GHI moltiplicato per l'altezza H. Ma questo contorno è maggiore di *circ.* CD; dunque la superficie del prisma sarebbe maggiore di *circ.* CD$\times$H, che, per ipotesi, è la superficie del cilindro della stessa altezza e del quale CA è il raggio della base. Dunque la superficie del prisma sarebbe maggiore di quella del cilindro. Ma, quando anche il prisma fosse iscritto nel cilindro, la sua superficie sarebbe minore di quella del cilindro (2); a più forte ragione n'è ella minore quando il prisma non si estende fino al cilindro. Dunque la seconda ipotesi non potrebbe aver luogo; dunque 2° *la circonferenza della base di un cilindro retto moltiplicata per la sua altezza non può misurare la superficie di un cilindro maggiore.*

Dunque finalmente la superficie convessa di un cilindro retto è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza.

PROPOSIZIONE IV. — *TEOREMA.*

La solidità di un cono retto è uguale al prodotto della sua base per la terza parte della sua altezza[1].

Sia SO (fig. 259) l'altezza del cono proposto, AO il raggio della sua base; se si indichi con *sup.* AO la superficie della base, dico che la solidità di questo cono sarà uguale a *sup.* AO$\times\frac{1}{3}$SO.

[1] Siccome abbiamo veduto essere in sostanza il cilindro un prisma che ha per base un poligono regolare d'infiniti lati; così il cono è una piramide che ha per base un poligono regolare d'infiniti lati, laonde le sue proprietà saranno le stesse che le proprietà della piramide — *Un cono, retto od obbliquo, ha per misura la terza parte del prodotto della sua base per la sua altezza — La superficie*

Infatti, supponiamo 1° che *sup.* AO$\times\frac{1}{3}$SO sia la solidità di un cono maggiore; per esempio, del cono di cui SO è sempre l'altezza, ma la cui base ha per raggio OB maggiore di AO.

Al cerchio che ha per raggio AO circoscrivasi un poligono regolare MNPT che non incontri la circonferenza che ha per raggio OB (10, 4, part. 1); s'immagini poscia una piramide che abbia per base il poligono e per vertice il punto S. La solidità di questa piramide (19, 2) è uguale all'aia del poligono MNPT moltiplicata per la terza parte dell'altezza SO. Ma il poligono è maggiore del cerchio iscritto rappresentato da *sup* AO; dunque la piramide è maggiore di *sup.* AO$\times\frac{1}{3}$SO, che, per ipotesi, è la misura del cono di cui S è il vertice e la cui base ha per raggio OB. Ora, per lo contrario, la piramide è minore del cono, perchè vi è contenuta; dunque 1° è impossibile che la base di un cono retto moltiplicata per la terza parte della sua altezza sia la misura di un cono maggiore.

Dico 2° che questo medesimo prodotto non può essere la misura di un cono minore. Imperocchè, per non cangiar figura, sia OB il raggio della base del cono dato, e sia, se è possibile, *sup.* OB$\times\frac{1}{3}$SO la solidità del cono che ha per altezza SO e per base il cerchio il cui raggio è AO. Si farà la medesima costruzione di sopra, e la piramide SMNPT avrà per misura l'aia MNPT moltiplicata per $\frac{1}{3}$SO. Ma l'aia MNPT è minore di *sup.* OB, dunque la piramide avrebbe una misura minore di *sup.* OB$\times\frac{1}{3}$SO e per conseguenza sarebbe minore del cono della cui base AO è il raggio e la cui altezza è SO. Ora, per lo contrario, la piramide è maggiore del cono, perchè il cono vi è contenuto; dunque 2° è impossibile che la base di un cono retto moltiplicata per la terza parte della sua altezza sia la misura di un cono minore.

Dunque finalmente la solidità di un cono retto è uguale al prodotto della sua base per la terza parte della sua altezza.

convessa di un cono retto ha per misura la circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato, cioè della retta generatrice — Le superficie convesse ed intiere dei coni simili, retti od obbliqui, stanno fra loro come i quadrati degli assi, o i quadrati delle altezze, e le loro solidità come i cubi di questi assi o di queste altezze.

Corollario. Un cono è la terza parte di un cilindro di uguale base e di uguale altezza; d'onde segue,

1° Che i coni di uguali altezze stanno fra loro come le loro basi;

2° Che i coni di uguali basi stanno fra loro come le loro altezze;

3° Che i coni simili stanno fra loro come i cubi dei diametri delle loro basi, o come i cubi delle loro altezze.

4° Che due coni equivalenti hanno le loro basi in ragion reciproca delle loro altezze.

Scolio. Sia R il raggio della base di un cono retto, H la sua altezza; la solidità del cono sarà $\pi R^2 \times \frac{1}{3}H$ o $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

PROPOSIZIONE V. — *TEOREMA.*

Un tronco di cono retto a basi parallele è uguale alla somma di tre coni che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e per basi, l'uno la base inferiore del tronco, l'altro la base superiore, e il terzo la media proporzionale fra queste due basi.

Sia TFCH (fig. 260) un tetraedro della stessa altezza che il cono SAB, e la cui base FCH sia equivalente alla base del cono. Si può supporre che queste due basi siano situate su uno stesso piano, allora i vertici S e T saranno a uguale distanza dal piano delle basi, e il piano EPD prolungato farà nel tetraedro la sezione IKL. Ora io dico che questa sezione IKL è equivalente alla base DE; perocchè le basi AB, DE stanno fra loro come i quadrati dei raggi AO, DP (11, 4, part. 1), o come i quadrati delle altezze SO, SP; i triangoli FCH, IKL stanno fra loro come i quadrati di queste medesime altezze (15, 2); dunque i cerchi AB, DE stanno fra loro come i triangoli FCH, IKL. Ma, per ipotesi, il triangolo FCA è equivalente al cerchio AB; dunque il triangolo IKL è equivalente al cerchio DE.

Ciò posto, la base AB moltiplicata per $\frac{1}{3}$SO è la solidità del cono SAB, e la base FCH moltiplicata per $\frac{1}{3}$SO è quella del tetrae-

dro TFCH; dunque, a cagione delle basi equivalenti, la solidità del tetraedro è uguale a quella del cono. Per una simile ragione, il tetraedro TIKL è equivalente al cono SDE; dunque il tronco di cono ADEB è equivalente al tronco di tetraedro FCHIKL. Ora, la solidità del tronco di tetraedro è uguale alla somma di tre tetraedri che hanno per altezza comune l' altezza del tronco, e per basi, uno la base inferiore del tronco, l' altro la base superiore, e il terzo la media proporzionale fra queste due basi; dunque, per essere le basi dell' un tronco equivalenti alle basi dell' altro, e l' altezza comune, sarà il tronco di cono retto uguale alla somma di tre coni che hanno per altezza comune l' altezza del tronco, ec.

Scolio. Le basi del tronco di cono ADEB, avendo per raggi l'una AO, l'altra DP, saranno uguali l' una a $\pi\times\overline{AO}^2$, l'altra $\pi\times\overline{DP}^2$; la media proporzionale tra $\pi\times\overline{AO}^2$ e $\pi\times\overline{DP}^2$ è $\pi\times AO\times DP$; dunque, essendo OP l'altezza del tronco, questo tronco avrà per misura $\frac{1}{3}OP\times(\pi\times\overline{AO}^2+\pi\times\overline{DP}^2+\pi\times AO\times DP)$, la quale espressione è la stessa che $\frac{1}{3}\pi\times OP\times(\overline{AO}^2+\overline{DP}^2+AO\times DP)$.

PROPOSIZIONE VI. — *TEOREMA.*

La superficie convessa di un cono retto è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato.

Sia AO (fig. 259) il raggio della base del cono dato, S il suo vertice, ed SA il suo lato; dico che la sua superficie convessa sarà *circ.* AO$\times$rà $\frac{1}{2}$SA. Imperocchè, sia, se è possibile, *circ.* AO$\times\frac{1}{2}$SA la superficie di un cono che abbia per vertice il punto S e per base il cerchio descritto col raggio OB maggiore di AO.

Circoscrivasi al cerchio minore un poligono regolare MNPT i cui lati non incontrino la circonferenza che ha per raggio OB; e sia SMNPT la piramide regolare che avrebbe per base il poligono e per vertice il punto S. La superficie convessa di questa piramide è uguale al perimetro MNPTM moltiplicato per $\frac{1}{2}$SA (29,2). Ma il perimetro MNPTM è maggiore di *circ.*·AO; dunque la superficie convessa della piramide è maggiore di *circ.* AO$\times\frac{1}{2}$SA e per

conseguenza maggiore della superficie convessa del cono che col medesimo vertice S avrebbe per base il cerchio descritto col raggio OB. Ora, per lo contrario, la superficie convessa del cono è maggiore di quella della piramide, perchè se si addossano base a base la piramide a una piramide uguale, il cono a un cono uguale, la superficie dei due coni invilupperà da ogni parte la superficie delle due piramidi; dunque la prima superficie sarà maggiore della seconda (lem. 2), e però la superficie convessa del cono è maggiore di quella della piramide che vi è compresa. Il contrario era una conseguenza della nostra ipotesi; dunque questa ipotesi non può aver luogo; dunque 1° la circonferenza della base di un cono moltiplicata per la metà del suo lato non può misurare la superficie convessa di un cono maggiore.

Dico 2° che lo stesso prodotto non può misurare la superficie di un cono minore. Perocchè sia BO il raggio della base del cono dato, e sia, se è possibile, *circ.* $BO \times \frac{1}{2}SB$ la superficie del cono il cui vertice sia S e la cui base abbia per raggio AO minore di OB.

Fatta la medesima costruzione che qui innanzi, la superficie della piramide SMNPT sarà sempre uguale al contorno MNPT moltiplicato per $\frac{1}{2}SA$. Ora il contorno MNTP è minore di *circ.* BO, SA è minore di SB; dunque per questa doppia ragione la superficie convessa della piramide è minore di *circ.* $BO \times \frac{1}{2}SB$, che, per ipotesi, è la superficie del cono la cui base ha per raggio AO; dunque la superficie della piramide sarebbe minore di quella del cono iscritto. Ora, al contrario, n'è maggiore; perchè addossando base a base la piramide a una piramide uguale, il cono a un cono uguale, la superficie delle due piramidi invilupperà quella dei due coni, e però sarà la maggiore. Dunque 2° è impossibile che la circonferenza della base di un cono retto moltiplicata per la metà del suo lato sia la misura della superficie convessa di un cono minore.

Dunque finalmente la superficie convessa di un cono retto è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato [1].

[1] In cambio di prendere la metà del lato, si potrebbe prendere la metà dell'al-

Scolio. Sia L il lato del cono, R il raggio della sua base, la circonferenza di questa base sarà $2\pi R$, e la superficie del cono avrà per misura $2\pi R \times \frac{1}{2}L$, o πRL.

PROPOSIZIONE VII. — *TEOREMA.*

La superficie convessa del tronco di cono retto è uguale al suo lato moltiplicato per la semisomma delle circonferenze delle sue due basi.

Nel piano SAB (fig. 261) che passa per l'asse SO, conducasi perpendicolarmente ad SA la retta AF uguale alla circonferenza che ha per raggio OA; congiungasi SF e si conduca DH parallela ad AF.

A cagione dei triangoli simili SAO, SDC, si avrà AO : CD :: SA : SD; e a cagione dei triangoli simili SAF, SDH, si avrà AF : DH :: SA : SD; dunque AF : DH :: AO : DC, o :: *circ.* AO : *circ.* DC (11, 4). Ma per costruzione AF = *circ.* AO; dunque DH = *circ.*

tro fattore, e così la superficie convessa del cono retto è uguale al suo lato moltiplicato per la metà della circonferenza della base. Ora, se dal punto F (fig. 251) medio del lato SC si faccia una sezione con un piano parallelo alla base, la circonferenza FKH sarà appunto metà della circonferenza ADB della base, perchè queste due circonferenze stanno fra loro come i raggi FG, AC, e d'altra parte si ha FG : AC : : SF : SC. Dunque *la superficie convessa di un cono retto ha per misura il suo lato moltiplicato per la circonferenza della sezione fatta con un piano parallelamente alla base e dal punto medio del lato.*

La stessa superficie si può anche misurare altrimente. Se dal punto F si tiri FO perpendicolare ad SC, e si termini al punto O dove incontra l'asse SA, i due triangoli rettangoli SCA, SFO, avendo l'angolo ASC di comune, sono simili, e dànno la proporzione SA : SF : : AC : FO; invece del rapporto AC : FO, si può sostituire quello di *circ.* AC : *circ.* FO, perchè le circonferenze sono proporzionali ai raggi, e si ha così SA : SF : : *circ.* AC : *circ.* FO; da questa proporzione risulta SF $\times$ *circ.* AC = SA $\times$ *circ.* FO; ma SF $\times$ *circ.* AC è uguale alla superficie convessa del cono; dunque anche SA $\times$ *circ.* FO sarà uguale a questa superficie. Dal che risulta che *la superficie convessa di un cono retto ha per misura la sua altezza moltiplicata per la circonferenza che ha per raggio la perpendicolare elevata dal punto medio del lato del cono a questo lato e terminata all' asse.*

DC. Ciò posto, il triangolo SAF, che ha per misura $AF \times \frac{1}{2} SA$, è uguale alla superficie del cono SAB che ha per misura $circ.\ AO \times \frac{1}{2} SA$. Per una simile ragione il triangolo SDH è uguale alla superficie del cono SDE. Dunque la superficie del tronco ADEB è uguale a quella del trapezio ADHF. Questa ha per misura $AD \times \left(\frac{AF+DH}{2}\right)$, (7, 3, part. 1); dunque la superficie convessa del tronco di cono ADEB è uguale al suo lato AD moltiplicato per la semisomma delle circonferenze delle sue due basi.

Corollario. Pel punto I, medio di AD, conducasi IKL parallela ad AB ed IM parallela ad AF; si dimostrerà come qui sopra che $IM = circ.\ IK$. Ma il trapezio $ADHF = AD \times IM = AD \times circ.\ IK$. Dunque si può dire anche che *la superficie di un tronco di cono retto è uguale al suo lato moltiplicato per la circonferenza di una sezione fatta a uguale distanza dalle due basi* [1].

Scolio. Le misure delle superficie convesse del cilindro retto, del cono retto e del tronco di cono retto vanno comprese sotto questa sola proposizione. Se una linea retta AD situata tutta intera da una stessa parte della retta OC, e nel medesimo piano, fa una rivoluzione intorno ad OC, la superficie descritta da AD avrà per misura $AD \times \left(\frac{circ.\ AO + circ.\ DC}{2}\right)$, o $AD \times circ.\ IK$; essendo le rette AO, DC, IK le perpendicolari abbassate dalle estremità e dal punto medio della retta AD sull' asse OC.

Perocchè se si prolunghino AD ed OC fino al loro scambievole

[1] Se dal punto M (fig. 251) medio di FC si tiri MO parallela a CA, ed MN perpendicolare a CF e terminata all'asse CA, e dal punto F si tiri FP perpendicolare a CA, i due triangoli FCP, MON saranno simili avendo i loro lati rispettivamente perpendicolari, e i lati omologhi daranno la proporzione FC : FP : : MN : MO; ma in cambio di MN ed MO si può sostituire *circ.* MN e *circ.* MO, perchè le circonferenze sono proporzionali ai raggi; dunque FC : FP : : *circ.* MN : *circ.* MO, la quale proporzione dà $FC \times circ.\ MO = FP \times circ.\ MN$; ma $FC \times circ.\ MO$ è uguale alla superficie convessa del tronco CDBH: dunque questa superficie è anche uguale ad $FP \times circ.\ MN$. Da ciò si vede che *la superficie convessa di un tronco di cono retto ha per misura la sua altezza moltiplicata per la circonferenza che ha per raggio la perpendicolare elevata al suo lato dal punto medio e terminata all'asse.*

incontro in S, è chiaro che la superficie descritta da AD è quella del tronco di cono retto le cui basi hanno per raggio OA e DC, avendo l'intiero cono per vertice il punto S. Adunque questa superficie avrà la misura predetta.

Questa misura avrebbe sempre luogo, quando anche il punto D cadesse in S, il che darebbe un cono intiero, come pure quando la retta AD fosse parallela all'asse, il che darebbe un cilindro. Nel primo caso DC sarebbe nulla, nel secondo DC sarebbe uguale ad AO e ad IK.

PROPOSIZIONE VIII. — *TEOREMA.*

La superficie descritta dalla rivoluzione di una porzione di poligono regolare situata tutta intera dalla stessa parte del diametro, attorno questo diametro, ha per misura la circonferenza del cerchio iscritto moltiplicata per quella parte del diametro compresa fra le perpendicolari abbassate su di esso dalle estremità della porzione generatrice, cioè moltiplicata per la sua altezza.

Sia ABCD (fig. 262) una porzione di poligono regolare, situata tutta intera dalla stessa parte del diametro FG, e faccia una rivoluzione intorno a questo diametro; la superficie descritta avrà per misura MQ $\times$ *circ.* OI, essendo OI il raggio del cerchio iscritto, ed MQ l'altezza di questa superficie o la parte dell'asse compresa fra le perpendicolari AM, DQ.

Essendo il punto I medio di AB, ed essendo IK la perpendicolare abbassata all'asse dal punto I, la superficie descritta da AB avrà per misura AB $\times$ *circ.* IK (7). Si tiri AX parallela all'asse, i triangoli ABX, OIK avranno i lati rispettivamente perpendicolari, cioè OI ad AB, IK ad AX e OK a BX; dunque questi triangoli sono simili e dànno la proporzione AB : AX ovvero MN :: OI : IK, ovvero :: *circ.* OI : *circ.* IK; dunque AB$\times$ *circ.* IK $=$ MN$\times$ *circ.* OI. Da ciò si vede che la superficie descritta da AB è uguale alla sua altezza MN moltiplicata per la circonferenza del cerchio

iscritto. Parimente la superficie descritta da BC, $=$ NP $\times$ *circ.* OI, la superficie descritta da CD, $=$ PQ $\times$ *circ.* OI. Dunque la superficie descritta dalla porzione di poligono ABCD ha per misura (MN + NP + PQ) $\times$ *circ.* OI, ovvero MQ $\times$ *circ.* OI; cioè è uguale alla sua altezza moltiplicata per la circonferenza del cerchio iscritto.

Corollario. Se il lato della porzione ABCD è una parte aliquota della circonferenza, e l' intiero poligono è d' un numero pari di lati, allora l' asse FG passerà per due vertici opposti F e G, e la superficie intiera descritta dalla porzione del semipoligono FACG sarà uguale al suo asse FG moltiplicato per la circonferenza del cerchio iscritto. Quest' asse FG sarà nello stesso tempo il diametro del cerchio circoscritto.

PROPOSIZIONE IX. — *TEOREMA.*

La superficie della sfera è uguale al suo diametro moltiplicato per la circonferenza di un cerchio massimo.

Io dico 1° che il diametro di una sfera, moltiplicato per la circonferenza del suo cerchio massimo, non può misurare la superficie di una sfera maggiore. Imperocchè sia, se è possibile, AB $\times$ *circ.* AC (fig. 263) la superficie della sfera che ha per raggio CD.

Al cerchio il cui raggio è CA, circoscrivasi un poligono regolare di un numero pari di lati che non incontri la circonferenza il cui raggio è CD, siano M ed S due vertici opposti di questi poligoni; e attorno il diametro MS facciasi rotare il semipoligono MPS. La superficie descritta da questo poligono avrà per misura MS $\times$ *circ.* AC, (8); ma MS è maggiore di AB; dunque la superficie descritta dal poligono è maggiore di AB $\times$ *circ.* AC, e però maggiore della superficie della sfera il cui raggio è CD. Ora, per lo contrario, la superficie della sfera è maggiore della superficie descritta dal poligono, perchè la prima inviluppa da ogni parte la seconda; dunque 1° il diametro di una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo cerchio massimo non può misurare la superficie di una sfera maggiore.

Dico 2° che questo stesso prodotto non può misurare la superficie di una sfera minore. Imperocchè sia, se è possibile, $DE \times$ *circ.* CD la superficie della sfera che ha per raggio CA. Si farà la medesima costruzione del primo caso e la superficie del solido generato dal poligono sarà sempre uguale ad $MS \times$ *circ.* AC. Ma MS è minore di DE, e *circ.* AC minore di *circ.* CD; dunque, per queste due ragioni, la superficie del solido descritto dal poligono sarebbe minore di $DE \times$ *circ.* CD, epperò minore della superficie della sfera che ha per raggio AC. Ora, al contrario, la superficie descritta del poligono è maggioro della superficie della sfera il cui raggio è AC, perchè la prima superficie inviluppa la seconda; dunque 2° il diametro di una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo cerchio massimo non può misurare la superficie di una sfera minore.

Dunque la superficie della sfera è uguale al suo diametro moltiplicato per la circonferenza del suo cerchio massimo.

Corollario. La superficie di un cerchio massimo si misura moltiplicando la sua circonferenza per la metà del raggio, ovvero per la quarta parte del diametro; dunque *la superficie della sfera è quadrupla di quella di un cerchio massimo.*

Scolio. Sendo così misurata la superficie della sfera e paragonata a superficie piane, sarà facile di avere il valore assoluto dei fusi e dei triangoli sferici dei quali si è determinato nel libro precedente il rapporto con l'intera superficie della sfera.

E primamente il fuso il cui angolo è A sta alla superficie della sfera come l'angolo A sta a quattro angoli retti (20,3), o come l'arco di cerchio massimo che misura l'angolo A sta alla circonferenza di questo stesso cerchio massimo. Ma la superficio della sfera è uguale a questa circonferenza moltiplicata pel diametro; dunque la superficie del fuso è uguale all'arco che misura l'angolo di questo fuso moltiplicato pel diametro.

In secondo luogo ogni triangolo sferico è equivalente al fuso il cui angolo è equivalente alla metà dell'eccesso della somma dei suoi tre angoli su due angoli retti (23,3). Siano dunque P, Q, R gli archi di cerchio massimo che misurano i tre angoli del triangolo; sia C la circonferenza di un cerchio massimo e D il suo diametro; il triangolo sferico sarà equivalente al fuso il cui

angolo ha per misura $\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2}$, e quindi la sua superficie sarà $D \times \left(\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2}\right)$.

Così, nel triangolo trirettangolo ciascuno degli archi P, Q, R è uguale a $\frac{1}{4}$ C, la loro somma è $\frac{3}{4}$ C, l'eccesso di questa somma sopra $\frac{1}{2}$ C è $\frac{1}{4}$ C e la metà di questo eccesso è $\frac{1}{4}$ C; dunque la superficie del triangolo trirettangolo $= \frac{1}{8}$ C$\times$D, il che forma la ottava parte della superficie della sfera.

La misura dei poligoni sferici segue immediatamente da quella dei triangoli o da altra parte essa è intieramento determinata dalla prop. XXIV, lib. II, poichè l' unità di misura che è il triangolo trirettangolo è stato valutato in superficie piana.

PROPOSIZIONE X.— *TEOREMA*.

La superficie di una zona sferica qualunque è uguale all'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza di un cerchio massimo.

Sia EF (fig. 269) un arco qualunque minore o maggiore del quadrante e sia abbassata FG perpendicolare sul raggio EC; dico che la calotta descritta dalla rivoluzione dell'arco EF attorno EC, avrà per misura EG $\times$ *circ.* EC.

Imperocchè supponiamo primamente che questa calotta abbia una misura minore, e sia, se è possibile, questa misura=EG$\times$*circ.* CA. Iscrivasi nell'arco EF una porzione di poligono regolare EMNOPF i cui lati non incontrino la circonferenza descritta col raggio CA, e si abbassi CI perpendicolare sopra EM; la superficie descritta dal poligono EMF girando intorno ad EC avrà per misura EG $\times$ *circ.* CI, (8). Questa quantità è maggiore di EG$\times$*circ.* AC, che, per ipotesi, è la misura della calotta descritta dall'arco EF. Dunque la superficie descritta dal poligono EMNOPF sarebbe maggiore della superficie descritta dall' arco circoscritto EF; ora, per contrario, quest'ultima superficie è maggiore della prima, perchè l'inviluppa da ogni parte; dunque la misura di una calot-

ta non può essere minore dell' altezza di questa calotta moltiplicata per la circonferenza di un cerchio massimo.

Dico in secondo luogo che la misura della stessa calotta non può essere maggiore dell' altezza di questa calotta moltiplicata per la circonferenza di un cerchio massimo. Perocchè supponiano che si tratti della calotta descritta dall' arco AB intorno ad AC, e sia, se è possibile, *calot.* AB $>$ AD $\times$ *circ.* AC. L' intera superficie della sfera, composta dalle due calotte AB, BH ha per misura AH $\times$ *circ.* AC, (9), o AD $\times$ *circ.* AC $+$ DH $\times$ *circ.* AC; se dunque si ha *calot.* AB $>$ AD $\times$ *circ.* AC, bisognerà che si abbia *calot.* BH $<$ DH $\times$ *circ.* AC; il che è contrario alla prima parte già dimostrata. Dunque 2° la misura di una calotta non può essere maggiore dell' altezza di questa calotta moltiplicata per la circonferenza di un cerchio massimo.

Dunque in ultimo ogni calotta sferica ha per misura la sua altezza moltiplicata per la circonferenza di un cerchio massimo.

Consideriamo ora una zona qualunque a due basi descritta dalla rivoluzione dell' arco FH (fig. 220) attorno il diametro DE, e siano abbassate le perpendicolari FO, HQ su questo diametro. La zona descritta dall' arco FH è la differenza delle due calotte descritte dagli archi DH e DF; queste hanno per misura DQ $\times$ *circ.* CD e DO $\times$ *circ.* CD; dunque la zona descritta da FH ha per misura (DQ $-$ DO) $\times$ *circ.* CD ovvero OQ $\times$ *circ.* CD.

Dunque ogni zona sferica a una o a due basi ha per misura l'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza di un cerchio massimo.

Corollario. Due zone prese in una medesima sfera o in uguali sfere, stanno fra loro come le rispettive altezze, e una zona qualunque sta alla superficie della sfera come l' altezza di questa zona sta al diametro.

Scolio. La corda AB (fig. 127) è media proporzionale fra il diametro BC e il segmento adiacente BD; laonde $\overline{AB}^2 = BC \times BD$ e moltiplicando da ambe le parti per BC sarà $BC \times \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \times BD$, la quale uguaglianza dà la proporzione $BC : BD :: \overline{BC}^2 : AB^2$ ovvero come un cerchio massimo al cerchio che ha per diametro AB; ma BC : BD come la sfera alla calotta descritta dall' arco AB, e la sfera è quadrupla di un cerchio massimo; dunque la calotta

AB è quadrupla del cerchio che ha per diametro AB, e però equivalente al cerchio che ha per raggio AB. Dunque *ogni calotta sferica è equivalente al cerchio che ha per raggio la corda dell' arco generatore.*

PROPOSIZIONE XI. — *TEOREMA.*

Se un triangolo ed un rettangolo di uguale base e di uguale altezza rotino simultaneamente intorno alla base comune, il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo sarà la terza parte del cilindro descritto dalla rivoluzione del rettangolo.

Sia BC (fig 264 e 265) la base comune del triangolo ABC e del rettangolo BCEF; si abbassi sull' asse la perpendicolare AD; il cono descritto dal triangolo ABD (fig. 264) è la terza parte del cilindro descritto dal rettangolo AFBD (4), e parimente il cono descritto dal triangolo ADC è la terza parte del cilindro descritto dal rettangolo ADCE; dunque la somma dei due coni o il solido descritto da ABC è la terza parte della somma dei due cilindri o del cilindro descritto dal rettangolo BCEF.

Se la perpendicolare AD (fig. 265) cade fuori del triangolo, allora il solido descritto da ABC sarà la differenza dei coni descritti da ABD ed ACD ; ma nello stesso tempo il cilindro descritto da BCEF sarà la differenza dei cilindri descritti da AFBD ed AECD. Dunque il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo sarà sempre la terza parte del cilindro descritto dalla rivoluzione del rettangolo di uguale base e di uguale altezza.

Scolio. Il cerchio il cui raggio è AD ha per superficie $\pi \times \overline{AD}^2$; dunque $\pi \times \overline{AD}^2 \times BC$ è la misura del cilindro descritto da BCEF, e $\frac{1}{3} \pi \times \overline{AD}^2 \times BC$ è quella del solido descritto dal triangolo ABC.

PROPOSIZIONE XII. — *PROBLEMA.*

Trovare la misura del solido generato dalla rivoluzione di un triangolo intorno ad una retta menata come si voglia fuori di questo triangolo da un suo vertice.

Sia il triangolo CAB (fig. 266), e dal vertice C si meni comun-

que CD fuori di questo triangolo; trattasi di misurare il solido che descrive il triangolo CAB rotando intorno all' asse CD.

Si prolunghi il lato AB fino a che incontri l' asse CD in D; dai punti A e B si abbassino sull'asse le perpendicolari AM, BN.

Il solido descritto dal triangolo CAD ha per misura, $\frac{1}{3}\pi\times\overline{AM}^2\times CD$, (11); il solido descritto dal triangolo CBD ha per misura $\frac{1}{3}\pi\times\overline{BN}^2\times CD$; dunque la differenza di questi solidi o il solido descritto da ABC avrà per misura $\frac{1}{3}\pi(\overline{AM}^2-\overline{BN}^2)\times CD$.

Si può dare un' altra forma a questa espressione. Dal punto I, medio di AB, conducasi IK perpendicolare a CD e dal punto B si meni BO parallela a CD; si avrà $AM+BN = 2IK$, (7, 3, part. I) ed $AM - BN=AO$; dunque $(AM+BN)\times(AM-BN)$, o $\overline{AM}^2-\overline{BN}^2 =2IK\times AO$. La misura del solido di cui si tratta è dunque espressa anco da $\frac{2}{3}\pi\times IK\times AO\times CD$. Ma se si abbassi CP perpendicolare sopra AB, i triangoli ABO, DCP, saranno simili, e daranno la proporzione $AO : CP :: AB : CD$; donde risulta $AO\times CD=CP\times AB$; d' altra parte $CP\times AB$ è il doppio dell'aia del triangolo ABC; in modo che si ha $AO\times CD=2ABC$; dunque il solido descritto dal triangolo ABC ha pure per misura $\frac{4}{3}\pi\times ABC\times IK$, o, ch' è lo stesso, $ABC\times\frac{2}{3}$ *circ.* IK; (perchè *circ.* $IK=2\pi.IK$.) Dunque *il solido descritto dal triangolo* ABC *ha per misura l'aia di questo triangolo moltiplicata pei due terzi della circonferenza che descrive il punto* I *medio della sua base.*

Corollario. Se il lato $AC=CB$ (fig. 267), la retta CI sarà perpendicolare ad AB, l'aia ABC sarà uguale ad $AB\times\frac{1}{2}CI$ e la solidità $\frac{4}{3}\pi\times ABC\times IK$ diverrà $\frac{2}{3}\pi\times AB\times IK\times CI$. Ma i triangoli ABO CIK sono simili e dànno la proporzione $AB : BO$ o $MN :: CI : IK$; dunque $AB\times IK=MN\times CI$; dunque il solido descritto dal triangolo isoscele ABC avrà per misura $\frac{2}{3}\pi\times MN\times\overline{CI}^2$.

Scolio. La soluzione generale par che supponga che la retta AB prolungata incontri l'asse; ma i risultamenti non sarebber men veri, quando la retta AB fosse parallela all' asse.

In fatti il cilindro descritto da AMNB (fig. 268) ha per misura $\pi\overline{AM}^2.MN$, il cono descritto da $ACM = \frac{1}{3}\pi.\overline{AM}^2.CM$, e il cono descritto da $CBN=\frac{1}{3}\pi.\overline{AM}^2.CN$. Sommando i due primi solidi e dalla somma togliendo il terzo, si avrà pel solido descritto da ABC, $\pi.\overline{AM}^2.(MN+\frac{1}{3}CM-\frac{1}{3}CN)$; e poichè $CN-CM=MN$, questa

espressione si riduce a $\pi.\overline{AM}^2.\frac{2}{3}MN$ ovvero $\frac{2}{3}\pi.\overline{CP}^2.MN$, il che si accorda coi risultamenti già trovati.

PROPOSIZIONE XIII. — *TEOREMA.*

Se si congiungano le estremità di una porzione di poligono regolare col centro, e s'immagini che il settore poligono che ne nasce situato tutto intero da una stessa parte di un diametro roti intorno a questo diametro, il solido descritto avrà per misura i due terzi del prodotto della sua altezza per il cerchio iscritto nella porzione.

Sia il settore poligono AOD (fig. 262) situato da una stessa parte del diametro FG, sia OI il raggio del cerchio iscritto nella porzione di poligono regolare ABCD; dico che il solido descritto da AOD avrà per misura $\frac{2}{3}\pi.\overline{OI}^2.MQ$, essendo MQ l'altezza di questo solido, ovvero la porzione dell' asse determinata dalle perpendicolari estreme AM, DQ.

Infatti tutti i triangoli AOB, BOC, ec. sono uguali e isosceli. Ora, secondo il corollario della proposizione precedente, il solido prodotto dal triangolo isoscele AOB ha per misura $\frac{2}{3}\pi.\overline{OI}^2.MN$, il solido descritto dal triangolo BOC ha per misura $\frac{2}{3}\pi\overline{OI}^2.PN$, e il solido descritto dal triangolo COD ha per misura $\frac{2}{3}\pi.\overline{OI}^2.PQ$; dunque la somma di questi solidi o l' intiero solido descritto dal settore poligono AOD avrà per misura $\frac{2}{3}\pi.\overline{OI}^2.(MN+NP+PQ)$ ovvero $\frac{2}{3}\pi.\overline{OI}^2.MQ$.

PROPOSIZIONE XIV. — *TEOREMA.*

Ogni settore sferico ha per misura la calotta che gli serve di base moltiplicata per la terza parte del raggio e la sfera intiera ha per misura la sua superficie moltiplicata per la terza parte del raggio.

Sia ABC (fig. 269) il settore circolare che con la sua rivoluzio-

ne intorno ad AC descrive il settore sferico; la calotta descritta da AB essendo AD×*circ.* AC, o $2\pi.AC\times AD$, (12), dico che il settore sferico avrà per misura questa calotta moltiplicata per $\frac{1}{3}$ AC, o $\frac{2}{3}\pi\overline{AC}^2.AD$.

In fatti 1° supponiamo, se è possibile, che questa quantità $\frac{2}{3}\pi\overline{AD}^2.AD$ sia la misura di un settore sferico maggiore, per esempio, del settore sferico descritto dal settore circolare ECF simile ad ACB.

Iscrivasi nell' arco EF la porzione di poligono regolare EMNF i cui lati non incontrino l' arco AB; s'immagini poscia che il settore poligono ENFC roti intorno ad EC nello stesso tempo che il settore circolare ECF. Sia CI il raggio del cerchio iscritto nel poligono, e sia abbassata FG perpendicolare sopra EC. Il solido descritto dal settore poligono avrà per misura $\frac{2}{3}\pi\overline{CI}^2.EG$, (13); ora CI è maggiore di AC per costruzione, ed EG è maggiore di AD; imperocchè, congiungendo AB, EF, i triangoli EFG, ABD che sono simili, dànno la proporzione EG : AD :: FG : BD :: CF : CB ; dunque EG$>$AD.

Per questa duplice ragione $\frac{2}{3}\pi.\overline{CI}^2.EG$ è maggiore di $\frac{2}{3}\pi.\overline{CA}^2.AD$; la prima espressione è la misura del solido descritto dal settore poligono, la seconda è per ipotesi quella del settore sferico descritto dal settore circolare ECF; dunque il solido descritto dal settore poligono sarebbe maggiore del settore sferico descritto dal settore circolare. Ora, al contrario, il solido di cui si tratta è minore del settore sferico, perchè vi è contenuto; dunque l'ipotesi donde si è partito non potrebbe sussistere; dunque 1° la calotta o base di un settore sferico moltiplicata per la terza parte del raggio non può misurare un settore sferico maggiore.

Dico 2° che lo stesso prodotto non può misurare un settore sferico minore. Imperocchè sia CEF il settore circolare che con la sua rivoluzione produce il settore sferico dato, e supponiamo, se è possibile, che $\frac{2}{3}\pi.\overline{CE}^2\times EG$ sia la misura di un settore sferico minore, per esempio, di quello che proviene dal settore circolare ACB.

Rimanendo la stessa costruzione precedente, il solido descritto dal settore poligono avrà sempre per misura $\frac{2}{3}\pi\overline{CI}^2$ EG. Ma CI è minore di CE; dunque il solido è minore di $\frac{2}{3}\pi.\overline{CE}^2.EG$, che,

per ipotesi, è la misura del settore sferico descritto dal settore circolare ACB. Dunque il solido descritto dal settore poligono sarebbe minore del settore sferico descritto da ACB. Ora, per lo contrario, il solido di cui si tratta è maggiore del settore sferico, perchè quest'ultimo è contenuto nell' altro. Dunque 2° è impossibile che la calotta di un settore sferico moltiplicata per la terza parte del raggio sia la misura di un settore sferico minore.

Dunque ogni settore sferico ha per misura la calotta che servegli di base moltiplicata per la terza parte del raggio.

Un settore circolare ACB può aumentare fino a diventare uguale al semicerchio; allora il settore sferico descritto dalla sua rivoluzione è la sfera intiera. Dunque *la solidità della sfera è uguale alla sua superficie moltiplicata per la terza parte del suo raggio.*

Corollario I. Si è veduto nello scolio della prop. X che la calotta è equivalente al cerchio che ha per raggio la corda dell'arco generatore; dunque *un settore sferico è equivalente a un cono che ha per altezza l' altezza di questo settore e per base la corda dell'arco generatore della calotta che serve di base al settore.*

II. Essendo la superficie della sfera quadrupla di quella di un suo cerchio massimo, *la sfera è equivalente a un cono che ha per altezza il raggio della sfera e per base un cerchio quadruplo di un cerchio massimo.*

III. Essendo fra loro le superficie delle sfere come i quadrati dei loro raggi, queste superficie moltiplicate pei raggi stanno fra loro come i cubi dei raggi. Dunque *le solidità di due sfere stanno fra loro come i cubi dei loro raggi, o come i cubi dei loro diametri.*

Scolio. Sia R il raggio di una sfera, la sua superficie sarà $4\pi R^2$, e la sua solidità $4\pi R^2 \times \frac{1}{3}R$, o $\frac{3}{4}\pi R^3$. Se si chiami D il diametro, si avrà $R = \frac{1}{2}D$ ed $R^3 = \frac{1}{8}D^3$; dunque la solidità si esprimerà ancora con $\frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8}D^3$, o $\frac{1}{6}\pi D^3$.

PROPOSIZIONE XV. — *TEOREMA.*

Il cilindro sta alla sfera cui è circoscritto come 6 : 4 tanto riguardo alla sua superficie totale quanto alla sua solidità.

Sia MNPQ (fig. 270) il cerchio massimo della sfera, ABCD il

quadrato circoscritto; se si facciano rotare insieme il semicerchio PMQ e il semiquadrato PADQ attorno il diametro PQ, il semicerchio descriverà la sfera e il semiquadrato descriverà il cilindro circoscritto alla sfera.

L'altezza AD di questo cilindro è uguale al diametro PQ, la base del cilindro è uguale al cerchio massimo, perchè ha per diametro AB uguale ad MN; dunque la superficie convessa del cilindro (3) è uguale alla circonferenza del cerchio massimo moltiplicata pel suo diametro. Questa misura è la stessa che quella della superficie della sfera (9); dunqne *la superficie convessa della sfera è uguale alla superficie convessa del cilindro circoscritto.*

Ma la superficie della sfera è nguale a quattro cerchi massimi; dunque la superficie convessa del cilindro circoscritto è uguale anche a quattro cerchi massimi, se vi si aggiungono le due basi che valgono due cerchi massimi, la superficie totale del cilindro circoscritto sarà uguale a sei cerchi massimi; dunque la superficie del cilindro sta alla superficie della sfera cui è circoscritto come 6 : 4 o come 3 : 2. Ed è la prima cosa che trattavasi dimostrare.

In secondo luogo, poichè la base del cilindro circoscritto è uguale a un cerchio massimo e la sua altezza al diametro, la solidità del cilindro sarà uguale al cerchio massimo moltiplicato per il diametro (1). Ma la solidità della sfera è uguale a quattro cerchi massimi moltiplicati per la terza del raggio (15), o, che torna lo stesso, a un cerchio massimo moltiplicato pei $\frac{4}{3}$ del raggio, o i $\frac{2}{3}$ del diametro; dunque il cilindro sta alla sfera cui è circoscritto come 2 : 3, e per conseguenza le solidità di questi due corpi stanno fra loro come le superficie rispettive.

Scolio. Si può osservare che se si taglino la sfera e il cilindro circoscritto con due piani perpendicolari all'asse, le intersezioni fatte sulle due superficie, cioè la porzione della superficie convessa del cilindro e la zona, sono equivalenti. Infatti ciascuna di queste ha per misura l'altezza comune, cioè la distanza dei due piani di sezione, per la circonferenza di un cerchio massimo.

PROPOSIZIONE XVI. — *TEOREMA.*

Il cono sta alla sfera cui è circoscritto come 9 : 4 così per rispetto alla superficie totale, come per rispetto alla solidità.

Sia il triangolo equilatero ABC (fig. 274) e DFE il cerchio iscritto; si abbassi ad AB la perpendicolare CP, la quale, com'è noto, passerà pel centro O; mentre il triangolo ACP rota intorno a CP per descrivere il cono CAB, il semicerchio FDP descriverà la sfera iscritta DFE.

Tirando il raggio OE, esso sarà perpendicolare a CB, e i due triangoli rettangoli CPB, OEC, avendo l'angolo OCE di comune sono simili e i lati omologhi dànno la proporzione CB : BP :: CO : OE; ma CB è doppio di BP; dunque anche CO è doppio di OE, e quindi il quadrato di CO è quadruplo del quadrato di OE; ma nel triangolo rettangolo COE si ha $\overline{CO}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{CE}^2$; dunque il quadrato di CE o di PB è triplo del quadrato di OE. Adunque la base del cono è uguale a tre cerchi massimi della sfera iscritta.

Ora la superficie convessa del cono ha per misura (6) la circonferenza della base per BE; mentre questa base ha per misura la stessa circonferenza per la metà del raggio PB, ovvero per la metà di AB; dunque la superficie convessa del cono è doppia della base, e però contiene sei cerchi massimi; aggiungendovi la base che val tre cerchi massimi, la superficie totale del cono conterà nove cerchi massimi; la sfera ne contiene quattro; dunque la superficie del cono sta a quella della sfera cui è circoscritto come 9 : 4.

Le solidità di questi due solidi hanno lo stesso rapporto. Infatti la solidità del cono è uguale alla base, cioè a tre cerchi massimi, moltiplicati per $\frac{1}{3}$ CP$=$OP, ovvero a nove cerchi massimi moltiplicati per $\frac{1}{3}$ OP; la solidità della sfera è uguale a quattro cerchi massimi moltiplicati per $\frac{1}{3}$ OP; dunque la solidità del cilindro sta a quella della sfera cui è circoscritto come 9 : 4.

Corollario. I numeri 9, 6, 4 formano una proporzione continua; laonde il cilindro circoscritto alla sfera è medio proporzionale tra

questa sfera e il cono ad essa circoscritto così per rispetto alla superficie totale come per rispetto alla solidità.

Scolio. Se s'immagini un poliedro di cui tutte le facce tocchino la sfera, questo poliedro potrà essere considerato come composto di piramidi che hanno tutte per vertice il centro della sfera e le cui basi sono le differenti facce del poliedro. Ora è chiaro che tutte coteste piramidi avranno per altezza comune il raggio della sfera, in modo che ciascuna piramide sarà uguale alla faccia del poliedro che le serve di base moltiplicata per la terza parte del raggio; dunque l'intiero poliedro sarà uguale alla sua superficie moltiplicata per la terza parte del raggio della sfera iscritta.

Da ciò si vede che le solidità dei poliedri circoscritti alla sfera stanno fra loro come le superficie di questi medesimi poliedri. Così la proprietà che abbiamo dimostrata del cilindro e del cono circoscritto è comune ad una infinità di altri corpi.

Si è osservato parimente (prop. VII, cor., lib. IV, part. I) che le superficie dei poligoni circoscritti al cerchio stanno fra loro come i loro contorni.

PROPOSIZIONE XVII. — *PROBLEMA.*

Supposto che un segmento circolare faccia una rivoluzione attorno al diametro esteriore a questo segmento, trovare il valore del solido così generato.

Sia BMD (fig. 271) il segmento circolare dato; si abbassino sull'asse le perpendicolari BE, DF; dal centro C conducasi CI perpendicolare sulla corda BD e si tirino i raggi CB, CD.

Il solido descritto dal settore $BCA = \frac{2}{3}\pi . \overline{CB}^2 . AE$, (14); il solido descritto dal settore $DCA = \frac{2}{3}\pi . \overline{CB}^2 . AF$; dunque la differenza di questi due solidi, o il solido descritto dal settore DCB, $= \frac{2}{3}\pi . \overline{CB}^2 . (AF - AE) = \frac{2}{3}\pi . \overline{CB}^2 . EF$. Ma il solido descritto dal triangolo isoscele DCB ha per misura $\frac{2}{3}\pi . \overline{CI}^2 . EF$, (12, cor.); dunque il solido descritto dal segmento $BMD = \frac{2}{3}\pi . EF\ (\overline{CB}^2 - \overline{CI}^2)$. Ora nel triangolo rettangolo CBI si ha $\overline{CB}^2 - \overline{CI}^2 = \overline{BI}^2 = \frac{1}{4}\overline{BD}^2$; dunque il solido descritto dal segmento BMD avrà per misura $\frac{2}{3}\pi EF . \frac{1}{4}\overline{BD}^2$, o $\frac{1}{6}\pi . \overline{BD}^2 . EF$.

Scolio. Il solido descritto dal segmento BMD sta alla sfera che ha per diametro BD, come $\frac{1}{6}\pi.\overline{BD}^2.EF$ sta a $\frac{1}{6}\pi.\overline{BD}^3$, o :: EF : BD.

PROPOSIZIONE XVIII. — *TEOREMA.*

Ogni segmento sferico compreso tra due piani paralleli ha per misura la semisomma delle sue basi moltiplicata per la sua altezza, più la solidità della sfera che ha per diametro questa medesima altezza.

Siano BE, DF (fig. 271) i raggi delle basi del segmento, EF la sua altezza, in maniera che il segmento sia prodotto dalla rivoluzione dello spazio circolare BMDFE attorno l'asse FE. Il solido descritto dal segmento $BMD = \frac{\pi}{6}\overline{BD}^2.EF$, (17), il tronco di cono descritto dal trapezio $BDFE = \frac{1}{3}\pi.EF.(\overline{BE}^2 + \overline{DF}^2 + BE.DF)$, (5); dunque il segmento che è la somma di questi due solidi $= \frac{1}{6}\pi.EF.(2\overline{BE}^2 + 2\overline{DF}^2 + 2BE.DF + \overline{BD}^2)$. Ma conducendo BO parallela ad EF, si avrà $DO = DF - BE$, $\overline{DO}^2 = \overline{DF}^2 - 2DF.BE + \overline{BE}^2$, e però $\overline{BD}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{DO}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{DF}^2 - 2DF \times BE + \overline{BE}^2$. Mettendo questo valore in cambio di $\overline{BD}^2$ nell'espressione del segmento, e cancellando ciò che si distrugge, si avrà per la solidità del segmento

$$\frac{1}{6}\pi.EF.(3\overline{BE}^2 + 3\overline{DF}^2 + \overline{EF}^2),$$

espressione che si scompone in due parti; l'una

$$\frac{1}{6}\pi.EF.(3\overline{BE}^2 + 3\overline{DF}^2), \text{ o } EF.\left(\frac{\pi\overline{BE}^2 + \pi\overline{DF}^2}{2}\right)$$

è la somma delle basi moltiplicata per l'altezza, l'altra $\frac{1}{6}\pi\overline{EF}^3$ rappresenta la sfera il cui diametro è EF (14, scol.); dunque ogni segmento di sfera, ec.

Corollario. Se una delle basi è nulla, il segmento di cui si tratta diviene un segmento sferico a una sola base; dunque *ogni seg-*

mento sferico ad una sola base equivale alla metà del cilindro di uguale base e di uguale altezza, più la sfera di cui quest'altezza è il diametro.

Scolio generale.

Sia R il raggio della base di un cilindro, H la sua altezza, la solidità del cilindro sarà $\pi R^2 \times H$, o $\pi R^2 H$.

Sia R il raggio della base di un cono, H la sua altezza; la solidità del cono sarà $\pi R^2 \frac{1}{3} H$ o $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Siano A e B i raggi delle basi di un tronco di cono retto, H la sua altezza; la solidità del tronco sarà $\frac{1}{3}\pi H\,(A^2+B^2+AB)$.

Sia R il raggio di una sfera; la sua solidità sarà $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Sia R il raggio di un settore sferico, H l'altezza della calotta che gli serve di base; la solidità del settore sarà $\frac{2}{3}\pi R^2 H$.

Siano P e Q le due basi di un segmento sferico, H la sua altezza, la solidità di questo segmento sarà $\left(\frac{P+Q}{2}\right) H + \frac{1}{6} H^3$.

Se il segmento sferico ha una sola base P, essendo nulla l'altra, la sua solidità sarà $\frac{1}{2} PH + \frac{1}{6}\pi H^3$.

FINE DEGLI ELEMENTI DI GEOMETRIA.

NOTE

SUGLI ELEMENTI DI GEOMETRIA

Il Legendre rendea conto nella sua prima nota delle nuove espressioni e definizioni da lui introdotte in quest'opera per dare al linguaggio geometrico più esattezza e precisione, e proponeva alcuni altri cangiamenti tendenti allo scopo medesimo. Ma noi abbiamo creduto superfluo il riprodurre questa nota, perchè già quei cangiamenti, essendo stati accolti ed approvati generalmente, non sono più da mettersi in dubbio o da proporsi come cosa nuova quali erano al tempo in cui l'autore dava il primo sì bell'ordine ed eleganza alle cose geometriche.

Vi abbiamo sostituita in vece questa nostra accennata già a carte 6.

NOTA I.

Sull' obbietto della Geometria.

Tutti gli oggetti della natura ci presentano una certa forma determinata dai limiti della materia che li compone; e per essa noi possiamo distinguerli l'un dall'altro, vedendo occupare da ciascuno di essi una data porzione dello spazio. In quanto si è a questa idea di spazio, noi non c'intratteremo a dilucidarla con altre parole, perocchè sarebbe un volerla anzi oscurare, richiamando ella da sè sola alla mente un' idea semplice, come quella di *tempo*, e però chiarissima per sè medesima. Ogni essere intelligente dacchè ha l' intuito della propria esistenza, si vede collocato in questo che noi diciamo spazio nel quale egli può muoversi secondo tre principali direzioni, cioè dinanzi o di dietro, di lato, e di su in giù; queste costituiscono le tre dimensioni dell' estensione, la lunghezza, la larghezza e la profondità, le quali si considerano come indeterminate nello spazio, ma si veggono limitate nei corpi.

La Geometria è quella branca delle Matematiche che studia appunto nell'estensione le leggi della quantità. Ora, le tre dimensioni dell' estensione, benchè si veggano sempre stare insieme e nello spazio e nei corpi, possono essere tuttavia concepite dallo spirito come separate e distinte; anzi è questa un'operazione naturalissima e comune di esso spirito. Se si considera, per esempio, l'al-

tezza di un edifizio, la distanza fra due punti, e simili, ben vedesi che in questo concetto non entra punto nè idea di lunghezza nè idea di profondità, ma la mente, fatta astrazione dalle due altre dimensioni, si fissa alla sola lunghezza; questo concetto di una sola dimensione costituisce la *linea*. Potrebbonsi anche concepire due sole dimensioni insieme e fare astrazione dalla terza, e allora si ha la *superficie*; trattandosi, per modo di esempio, di misurare l'ampiezza di un campo, non si fa caso punto della sua profondità. In ultimo si possono concepire tutte e tre le dimensioni insieme ed allora si ha il *corpo*, come, per esempio, quando si considera la capacità di un vase, la solidità di un muro, e simili. Questi tre concetti adunque di linea, di superficie e di corpo sono quelli di cui si occupa la Geometria. Essi sono affezioni e proprietà della materia nella quale si veggono sempre in natura, ma la Geometria le separa ed astrae da essa, perocch'ella non considera nei corpi se non le sole forme, ed è indifferente che queste forme di cui ella conosce le varie proprietà si scorgano in un corpo di una specie di materia piuttosto che di un' altra.

Ora è da notare che queste determinazioni delle varie forme del corpi non sono se non risultamenti a cui si perviene applicando all' estensione i principii generali delle leggi della quantità; per maniera di esempio, una linea può essere più o meno lunga, e qui chiaramente ci ha idea di quantità; ma essa può avere anche una tale o tal altra forma, e qui si potrebbe credere che non si vegga pure l' idea di quantità. Ma questa idea si scorgerà bene, osservando che una linea si può immaginare generata dallo scorrere di un punto, e la legge della sua generazione consiste così in una certa distanza costante o variabile che dee avere questo punto rispetto ad uno o più altri punti; così dunque la forma della linea non è che una conseguenza della quantità di questa distanza; per esempio, nella circonferenza del cerchio, il punto che la descrive dee scorrere intorno a un punto fisso ch'è il centro, rimanendo sempre ugualmente distante da esso; e questa distanza costante costituisce l' uniformità della curvatura della circonferenza. In quanto alle forme delle superficie, esse sono conseguenze di quelle delle linee dalle quali s' immaginano generate, e quelle dei corpi di quelle delle superficie generatrici.

Ma per avere ancora un' idea più generale che tutto quanto si studia nella Geometria rientra nei principii generali dell' Algoritmia, si consideri che lo studio delle equazioni il quale non versa che sulle quantità in generale, sui tipi, per dir così, delle relazioni loro, applicato alla Geometria dà le varie forme e le varie proprietà delle figure geometriche come è noto a quelli che sono versati nella Geometria analitica.

La Geometria, presa nel suo più vasto significato, considerando cioè non solo la retta il cerchio che sono le due linee più semplici e facili, ma ancora l'ellisse l'iperbole e la parabola, e tutte quelle che rientrano nel campo della geometria sublime, non tratta certamente di tutte le forme onde le linee, le superficie e i corpi sono suscettibili, imperocchè primieramente queste sono infinite e ce ne hanno di così complicate ed irregolari che sarebbe un entrare in campo intermi-

nato e scabrosissimo; secondariamente non ci sarebbe in un più vasto esame una proporzionata utilità, perchè le figure conosciute dalla Geometria sono le più regolari e notevoli ed anche le più comuni; tutte le altre non sono di niuna importanza e presentano sconcezza e irregolarità tale che tu non vi scopriresti le tante leggi e proprietà delle altre. E qui vogliamo che si consideri come a dinotare un corpo di figura sconcia e irregolare si suol usare la parola *informe*; e certo quel corpo che si chiama *informe* non è tale a rigore di termine, cioè *senza forma*, come proprio suona il vocabolo, ma quella parola è usata ad esprimere che ad essere notevole una forma dee presentare regolarità e simmetria, altrimenti non merita nemmeno il nome di forma, e si dice *difforme*. Per le stesse considerazioni si dice *formoso* un obbietto di forme belle e ammirande.

Le arti, ove si applica massimamente la Geometria, non si servono che delle figure da essa considerate, e tu non vi vedi che prismi, piramidi ed altri poliedri, coni, cilindri, sfere, e combinazioni di queste figure. E guardando alla natura, ella non ti presenta per lo più che forme regolari; ti dà la retta nel raggio della luce e nel filo a piombo, la parabola nei proietti, l' ellisse nelle orbite dei pianeti, la sfera, almeno sensibilmente, negli astri, il piano nella superficie delle acque stagnanti, i poliedri regolari nella cristallizzazione, e via discorrendo. Bastano queste poche osservazioni per dare una bastevole idea della grande utilità della Geometria.

NOTA II.

Dimostrazione analitica di alcune proposizioni fondamentali della Geometria.

Verremo qui mostrando come si può usare con gran vantaggio l'Analisi per dimostrare rigorosamente che la somma dei tre angoli di un triangolo è uguale a due retti, non che le altre proposizioni fondamentali della Geometria. Svolgeremo tutto ciò con tutte le necessarie particolarità, cominciando dalla somma dei tre angoli del triangolo.

Si dimostra immediatamente colla sovrapposizione e senza alcuna proposizione preliminare che *due triangoli sono uguali quando hanno un lato uguale adiacente ad angoli rispettivamente uguali*. Chiamiamo p il lato di cui si tratta, A e B i due angoli adiacenti, C il terzo angolo. Bisogna dunque che l'angolo C sia intieramente determinato quando si conoscono gli angoli A e B col lato p, perchè se più angoli potessero corrispondere ai tre dati A, B, p, vi sarebbero altrettanti triangoli differenti che avrebbero un lato uguale adiacente a due angoli rispettivamente uguali, il che è impossibile: adunque C dee essere una funzione determinata delle tre quantità A, B, p; l' esprimeremo così $C=\varphi(A, B, p)$.

Sia l' angolo retto uguale all' unità; allora gli angoli A, B, C saranno dei numeri compresi tra 0 e 2; e poichè $C=\varphi(A, B, p)$, dico che la linea p non dee

punto entrare nella funzione φ. Infatti si è veduto che C dee essere intieramente determinata dai soli dati A, B, p, senza altro angolo od altra linea qualunque, ma la linea p è eterogenea coi numeri A, B, C; e se si avesse un' equazione qualunque fra A, B, C, p, se ne potrebbe cavare il valore di p in A, B, C; d'onde risulterebbe che p è uguale a un numero, il che è impossibile: dunque p non può entrare nella funzione φ e si ha semplicemente $C = \varphi\,(A, B)$.[1]

Si prova già per questa formola che se due angoli di un triangolo sono uguali a due angoli di un altro triangolo, il terzo dee essere uguale al terzo; e posto ciò, facil cosa egli è il pervenire al teorema cui miriamo.

Sia primieramente ABC (fig. 109) un triangolo rettangolo in A; dal punto A si abbassi AD perpendicolare sull'ipotenusa. Gli angoli B e D del triangolo ABD sono uguali agli angoli B ed A del triangolo BAC; dunque, secondo ciò che si è or dimostrato, il terzo BAD è uguale al terzo C. Per la medesima ragione l'angolo $DAC = B$; dunque $BAD + DAC$ o $BAC = B + C$; ma BAC è retto; dunque *i due angoli acuti di un triangolo rettangolo, presi insieme, valgono un angolo retto.*

Sia in seguito BAC (112) un triangolo qualunque e BC un suo lato che non sia minore di ciascuno degli altri due; se dall'angolo opposto A si abbassa la perpendicolare, questa cadrà al di dentro del triangolo ABC, e lo dividerà in due triangoli rettangoli BAD, DAC; ora nel triangolo rettangolo BAD i due angoli BAD, ABD valgono insieme un angolo retto; nel triangolo rettangolo DAC, i due angoli DAC, ACD valgono pure un angolo retto; dunque i quattro riuniti, o solamente i tre BAC, ABC, ACB valgono insieme due angoli retti; dunque *in ogni triangolo la somma dei tre angoli è uguale a due angoli retti.*

È manifesto da ciò che questo teorema, considerato *a priori*, non dipende punto d' un incatenamento di proposizioni, e che deducesi immediatamente dal principio dell' omogeneità; principio che dee aver luogo in ogni relazione fra quantità qualunque. Ma procediamo innanzi, e facciam vedere che si possono trarre dalla medesima sorgente gli altri teoremi fondamentali della Geometria.

Serbiamo le stesse denominazioni che qui sopra e chiamiamo di più m il lato opposto all' angolo A, ed n il lato opposto all' angolo B. La quantità m dee essere intieramente determinata dalle sole quantità A, B, p; dunque m è una funzione di A, B, p, ed $\frac{m}{p}$ n'è anche una; di maniera che si può fare $\frac{m}{p} = \psi\,(A, B, p)$. Ma $\frac{m}{p}$ è un numero al pari di A e B; dunque la funzione ψ non dee

[1] Si è obbiettato contro questa dimostrazione che s' ella fosse applicata, parola per parola, ai triangoli sferici, ne risulterebbe che due angoli conosciuti bastano per determinare il terzo il che non ha luogo in questa sorta di triangoli. La risposta è che nei triangoli sferici si ha un elemento di più che nei triangoli piani, ed è il raggio della sfera del quale non si dee fare astrazione. Sia dunque r il raggio, allora in cambio di avere $C = \varphi\,(A, B, p)$, si avrà $C = \varphi\,(A, B, p, r)$ ove solamente $C = \varphi\left(A, B, \frac{p}{r}\right)$, in virtù della legge degli omogenei.

contenere la linea p, e si ha semplicemente $\frac{m}{p} = \psi$ (A, B), ovvero $m = p\,\psi$ (A, B). Si ha dunque similmente $n = p\,\psi$ (B, A).

Sia ora un altro triangolo formato cogli stessi angoli A, B, C ai quali siano opposti rispettivamente i lati m', n', p'. Poichè A e B non cangiano, si avrà in questo nuovo triangolo $m' = p'\,\psi$ (A, B), ed $n' = p'\,\psi$ (B, A). Dunque $m : m' :: n : n' :: p : p'$. Dunque *nei triangoli equiangoli, i lati opposti agli angoli uguali sono proporzionali.*

La proposizione del quadrato dell' ipotenusa è, come si sa, una conseguenza di quella dei triangoli equiangoli. Ecco dunque tre proposizioni fondamentali della Geometria, quella dei tre angoli di un triangolo, quella dei triangoli equiangoli e quella del quadrato dell' ipotenusa, le quali si deducono semplicissimamente e immediatissimamente dalla considerazione delle funzioni. Si possono per la stessa via dimostrare molto succintamente le proposizioni che riguardano i poligoni simili e i poliedri simili.

Sia ABCDE (fig. 281) un poligono qualunque; scelto un lato AB, come base, si formino tanti triangoli ABC, ABD, ec. su questa base, quanti angoli C, D, E, ec. ne sono al di fuori. Sia la base AB=p; siano A e B i due angoli del triangolo ABC adiacenti al lato AB; siano A', B' i due angoli del triangolo ABD adiacenti allo stesso lato AB, e così di seguito. Il poligono ABCDE sarà intieramente determinato, se si conoscano il lato p cogli angoli A, B, A', B', A'', B'', ec., e il numero dei dati sarà in tutto $2n-3$, essendo n il numero dei lati del poligono. Ciò posto, un lato o una retta qualunque x menata come si vorrà nel poligono, sarà una funzione di questi dati; e siccome $\frac{x}{p}$ dee essere un numero, si potrà supporre $\frac{x}{p} = \psi$ (A, B, A', B', ec.), ovvero $x = p\,\psi$ (A, B, A', B', ec.) e la funzione ψ non conterrà p. Se cogli stessi angoli A, B, A', B', ec. e un altro lato p', si formi un secondo poligono, si avrà per la retta x', corrispondente od omologa a x, il valore $n' = p'\,\psi$ (A, B, A', B', ec.); dunque $x : x' :: p : p'$. Si possono definire i poligoni costruiti, *poligoni simili*; dunque *nei poligoni simili le rette omologhe sono proporzionali.* Così non solo i lati omologhi, le diagonali omologhe, ma le rette terminate della stessa maniera nei due poligoni stanno fra loro come due altre rette omologhe qualunque.

Chiamiamo S la superficie del primo poligono; questa superficie è omogenea al quadrato p^2; bisogna dunque che $\frac{S}{p^2}$ sia un numero che non contenga se non gli angoli A, B, A', B', ec., in modo che si avrà $S = p^2\,\varphi$ (A, B, A', B', ec.). Per la stessa ragione, se S' è la superficie del secondo poligono, si avrà $S' = p'^2\varphi$ (A, B, A', B', ec.). Dunque $S : S' :: p^2 : p'^2$; e però *le aie dei poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.*

Passiamo ora ai poliedri. Si può supporre che una faccia sia determinata per mezzo di un lato cognito p e da vari angoli A, B, C, ec. Indi i vertici degli an-

goli poliedri, fuori di questa base, saranno determinati ciascuno da tre dati che si ponno riguardare come altrettanti angoli; in maniera che l'intiera determinazione del poliedro dipende da un lato p, e da parecchi angoli A, B, C, ec. il cui numero varia secondo la natura del poliedro. Ciò posto, una retta che congiunge due vertici del poliedro, o più generalmente, ogni retta x condotta in un modo determinato nel poliedro, coi soli dati che costituiscono questo solido, sarà una funzione dei dati p, A, B, C, ec.; e siccome $\frac{x}{p}$ dee essere un numero, la funzione uguale a $\frac{x}{p}$ non conterrà che gli angoli A, B, C, ec., e si potrà supporre $x=p\varphi$ (A, B, C, ec.). La superficie di questo solido è omogenea a p^2; sicchè questa superficie può rappresentarsi con $p^2 \psi$(A, B, C, ec.); la sua solidità è omogenea a p^3; e può rappresentarsi con p^3 Π (A, B, C, ec.), essendo le funzioni dinotate con ψ e Π indipendenti da p.

Supponiamo che si costruisca un secondo poliedro cogli stessi angoli A, B, C, ec., e un lato p' differente da p; chiameremo *poliedri simili* i poliedri così costruiti; e, ciò posto, la retta ch'era $p\varphi$ (A, B, C, ec.) o semplicemente $p\varphi$ in un poliedro, sarà $p'\varphi$ in un altro; la superficie che era $p^2\psi$ nell'uno sarà $p'^2\psi$ nell'altro, e da ultimo la solidità ch'era $p^3\Pi$ nell'uno sarà $p'^3\Pi$ nell'altro. Dunque, 1° *nei poliedri simili i lati o le rette omologhe sono proporzionali*; 2° *le loro superficie stanno come i quadrati di questi lati omologhi*; 3° *le solidità stanno come i cubi di questi medesimi lati.*

Gli stessi principii si applicano agevolmente al cerchio. Sia c la circonferenza ed s la superficie del cerchio il cui raggio è r; poichè non ci possono essere due cerchi disuguali descritti collo stesso raggio, le quantità $\frac{c}{r}$ ed $\frac{s}{r^2}$ debbono essere funzioni determinate di r; ma come queste quantità sono dei numeri, non debbono contenere nella loro espressione la linea r; sicchè si avrà $\frac{c}{r}=\alpha$, ed $\frac{s}{r^2}=\beta$, α e β essendo dei numeri costanti. Sia c' la circonferenza ed s' la superficie di un altro cerchio il cui raggio è r'; si avrà parimente $\frac{c'}{r'}=\alpha$, e $\frac{s'}{r'^2}=\beta$. Dunque $c : c' :: r : r'$, ed $s : s' :: r^2 : r'^2$, cioè *le circonferenze dei cerchi stanno come i raggi, e le loro superficie come i quadrati dei raggi.*

Consideriamo un settore di cui r sia il raggio ed A l'angolo al centro; sia x l'arco che termina il settore, ed y la superficie di questo stesso settore. Poichè il settore è intieramente determinato quando si conosce r ed A, bisogna che x ed y siano funzioni determinate di r e di A; dunque $\frac{x}{r}$ ed $\frac{y}{r^2}$ sono pure di tali funzioni. Ma $\frac{x}{r}$ è un numero al pari di $\frac{y}{r}$; dunque queste quantità non debbono contenere r, e sono semplicemente funzioni di A; in modo che si avrà $\frac{x}{r}$

$= \varphi(A)$, ed $\frac{y}{r^2} = \psi(A)$. Siano x' ed y' l'arco e la superficie di un altro settore il cui angolo è A ed il raggio r'; chiameremo questi due settori *settori simili*; e poichè l'angolo è lo stesso da ambe le parti, si avrà $\frac{x}{r'} = \varphi(A)$, ed $\frac{y'}{r'^2} = \psi(A)$. Dunque $x : x' :: r : r'$ ed $y : y' :: r^2 : r'^2$; e però, *gli archi simili o gli archi di settori simili sono proporzionali ai raggi, e questi settori ai quadrati dei raggi.*

È palese che dimostrerebbesi in ugual modo che le sfere stanno come i cubi dei loro raggi.

Si suppone in tutto ciò che precede che le superficie si misurano col prodotto di due linee, e le solidità col prodotto di tre; questo è ancor facile a dimostrare per via d'analisi. Consideriamo un rettangolo le cui due dimensioni sianu p e q, e la sua superficie che è una funzione di p e q, rappresentiamola con $\varphi(p, q)$. Se si considera un altro rettangolo le cui dimensioni sono $p+p'$ e q, è chiaro che questo rettangolo è composto di due altri, l'uno che ha per dimensioni p e q, l'altro che ha per dimensioni p' e q, in modo che si avrà

$$\varphi(p+p', q) = \varphi(p, q) + \varphi(p', q).$$

Sia $p' = p$, si avrà $\varphi(2p, q) = 2\varphi(p, q)$. Sia $p' = 2p$, si avrà $\varphi(3p, q) = \varphi(p, q) + \varphi(2p+q) = 3\varphi(p, q)$. Sia $p' = 3p$, si avrà $\varphi(4p, q) = \varphi(p, q) + \varphi(3p, q) = 4\varphi(p, q)$. Dunque in generale se k è un numero intero qualunque, si avrà $\varphi(kp, q) = k\varphi(p, q)$, ovvero $\frac{\varphi(p, q)}{p} = \frac{\varphi(kp, q)}{kp}$. Risulta da ciò che $\frac{\varphi(p, q)}{p}$ è una funzione di p, che non cangia mettendo in luogo di p un multiplo qualunque kp. Dunque questa funzione è indipendente da p, e non dee contenere che q. Ma per una simile ragione $\frac{\varphi(p, q)}{q}$ dev' essere indipendente da q; dunque $\frac{\varphi(p, q)}{pq}$ non racchiude nè p nè q, e così questa quantità dee ridursi ad una costante a. Si avrà dunque $\varphi(p, q) = apq$; e siccome nulla non impedisce di prendere $a = 1$, si avrà $\varphi(p, q) = pq$; e così la superficie di un rettangolo è uguale al prodotto delle sue due dimensioni.

Si dimostrerebbe in un modo assolutamente simile che la solidità di un parallelepipedo rettangolo le cui dimensioni sono p, q, r, è uguale al prodotto pqr delle tre dimensioni.

Osserveremo, del resto, che la considerazione delle funzioni, la quale fornisce così una dimostrazione semplicissima delle proposizioni fondamentali della Geometria, è stata già impiegata con successo per la dimostrazione dei principii fondamentali della Meccanica. (Vedi le *Memorie* di Torino, tom. II).

NOTA III

Sull'approssimazione della proposizione XVI, lib. IV, parte I.

Trovato che si è un raggio eccedente e uno deficiente i quali si accordino nelle prime cifre, si può terminare il calcolo in un modo speditissimo mediante una formola algebrica.

Sia a il raggio deficiente e b l'eccedente, la cui differenza è piccola; siano a' e b' i raggi seguenti che se ne deducono colle formole $b'=\sqrt{ab}$, $a'=\sqrt{\left(a.\frac{a+b}{2}\right)}$ Quello che si cerca si è l'ultimo termine della serie a, a', a'', ec. ch'è in pari tempo quello della serie b, b', b'', ec. Chiamiamo quest'ultimo termine x, e sia $b=a(1+\omega)$; si potrà sopporre $x=a(1+P\omega+Q\omega^2+\text{ec.})$, essendo P e Q dei coefficienti indeterminati. Ora i valori di b' ed a' dànno

$$b'=a\left(1+\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{8}\omega^2+\text{ec.}\right);$$

$$a'=a\left(1+\frac{1}{4}\omega^2-\frac{1}{32}\omega^2+\text{ec.}\right).$$

E se si fa parimente $b'=a'(1+\omega')$, si avrà

$$\omega'=\frac{1}{4}\omega-\frac{5}{32}\omega^2\ \text{ec.}$$

Ma il valore di x dee essere lo stesso, sia che la serie a, a', a'', ec. cominci con a, sia che cominci con a'; dunque si avrà

$$a(1+P\omega+Q\omega^2+\text{ec.})=a'(1+P'\omega'+Q\omega'^2+\text{ec.}).$$

Sostituendo in questa equazione i valori di a' e di ω' in a e in ω, e paragonando i termini simili, se ne dedurrà $P=\frac{1}{3}$, e $Q=-\frac{1}{15}$; dunque

$$x=a\left(1+\frac{1}{3}\omega-\frac{1}{15}\omega^2\right).$$

Se i raggi a e b si accordano nella prima metà delle loro cifre, si potrà rigettare il termine ω^2, e il valore precedente si ridurrà ad $x=\left(1+\frac{1}{3}\omega\right)=a+\frac{b-a}{3}$. Così, facendo $a=1,1282657$, e $b=1,1286063$, se ne dedurrà immediatamente $x=1,1283792$.

Se i raggi a e b non si accordano che nella prima terza parte delle loro cifre, bisognerà prendere i tre termini della formola precedente; così facendo $a=1,1265639$ e $b=1,1320149$, si troverà $x=1,1283791$.

Si potrebbe supporre che a e b siano ancora meno vicini l' uno all' altro; ma' allora sarà mestieri calcolare il valore di x con un maggior numero di termini.

L'approssimazione della prop. XIV, ch'è di Giacomo Gregory, è suscettibile di abbreviazioni simili. Noi rimandiamo il lettore all'opera di questo autore, intitolata: *Vera circuli et hyperbolæ quadratura*, opera di un merito grande per il tempo in cui venne in luce.

NOTA IV.

Ove si dimostra che il rapporto della circonferenza al diametro e il suo quadrato, sono numeri irrazionali.

Consideriamo la serie infinita

$$1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z.z+1}+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{a^3}{z.z+1.z+2}+\text{ec.}$$

il cui termine generale è $\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^n}{z.z+1.z+2\ldots.(z+n-1)}$, e supponiamo che $\varphi(z)$ ne rappresenti la somma. Se si pone $z+1$ in luogo di z, $\varphi(z+1)$ sarà parimente la somma della serie

$$1+\frac{a}{z+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z+1.z+2}+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{a^3}{z+1.z+2.z+3}+\text{ec.}$$

Sottragghiamo queste due serie termine a termine, l'una dall'altra, ed avremo $\varphi(z)-\varphi(z+1)$ per la somma del resto che sarà

$$\frac{a}{z.z+1}+\frac{a^2}{z.z+1.z+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{z.z+1.z+2.z+3}+\text{ec.}$$

Ma questo resto può esser messo sotto la forma

$$\frac{a}{z.z+1}\cdot\left(1+\frac{a}{z+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z+2.z+3}+\text{ec.}\right),$$

e allora riducesi a $\frac{a}{z.z+1}\varphi(z+2)$. Si avrà dunque generalmente

$$\varphi(z)-\varphi(z+1)=\frac{a}{z.z+1}\varphi(z+2).$$

Dividiamo questa equazione per $\varphi(z+1)$ e per semplicizzare il risultamento, sia $\psi(z)$ una nuova funzione di z, tale che $\psi(z)=\frac{a}{z}\cdot\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}$; allora si po-

trà mettere $\frac{a}{z\psi(z)}$ in luogo di $\frac{\varphi(z)}{\varphi(z+1)}$, e $\frac{(z+1)\psi(z+1)}{a}$ in cambio di $\frac{\varphi(z+2)}{\varphi(z+1)}$
Fatta la sottrazione, si avrà

$$\psi(z)=\frac{a}{z+\psi(z+1)}.$$

Ma, mettendo successivamente in questa equazione $z+1$, $z+2$, ec. in luogo di z, ne risulterà

$$\psi(z+1)=\frac{a}{z+1+\psi(z+2)},$$

$$\psi(z+2)=\frac{a}{z+2+\psi(z+3)};\ \text{ec.}$$

Dunque il valore di $\psi(z)$ si può esprimere con la frazione continua;

$$\psi(z)=\cfrac{a}{z+\cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2+\text{ ec.}}}}$$

Reciprocamente questa frazione continua, prolungata all'infinito, ha per somma $\psi(z)$, o la sua uguale $\frac{a}{z}\cdot\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}$; e questa somma, svolta in serie ordinarie, è

$$\frac{a}{z}\cdot\frac{1+\frac{a}{z+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z+1\cdot z+2}+\text{ec.}}{1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z\cdot z+1}+\text{ec.}}$$

Sia ora $z=\frac{1}{2}$; la frazione continua diverrà

$$\cfrac{2a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\text{ ec.}}}}$$

nella quale i numeratori, eccetto il primo, sono tutti uguali a $4a$, e i denominatori formano la serie dei numeri impari, 1, 3, 5, 7, ec. Il valore di questa frazione continua può dunque esprimersi anche con

$$2a\cdot\frac{1+\frac{4a}{2.3}+\frac{16a^2}{2.3.4.5}+\frac{64a^3}{2.3\ldots7}+\text{ec.}}{1+\frac{4a}{2}+\frac{16a^2}{2.3.4}+\frac{64a^3}{2.3\ldots6}+\text{ec.}}$$

Ma queste serie riferisconsi a formole note, e si sà che rappresentando con e il

numero di cui il logaritmo iperbolico è 1, l'espressione precedente riducesi a $\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{a}$; di maniera che si avrà in generale

$$\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}\;e^{-2\sqrt{a}}}\cdot 2\sqrt{a}=\cfrac{4a}{1+\cfrac{4a}{1+\cfrac{4a}{5+\text{ec.}}}}$$

Di qui risultano due formole principali secondo che a è positiva o negativa. Sia da prima $4a=x^2$, si avrà

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\cfrac{x^2}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\text{ec.}}}}$$

Indi sia $4a=-x^2$, e in virtù della nostra formola

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}=\sqrt{-1}\,.\,\text{tang.}\,x\text{, si avrà}$$

$$\text{tang.}\,x=1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\text{ec.}}}}$$

Questa si è la formola che servirà di base alla nostra dimostrazione. Ma è mestieri, innanzi tratto, dimostrare i due lemmi che seguono.

LEMMA I. *Sia una frazione continua prolungata all' infinito*

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\text{ ec.}}}}$$

nella quale i numeri m, n, m', n', ec. *sono degli interi positivi o negativi; se si suppone che le frazioni componenti* $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$ ec. *siano tutte minori dell' unità, dico che il valore totale della frazione continua sarà necessariamente un numero irrazionale.*

Primamente, dico che questo valore sarà minore dell'unità. Infatti senza diminuire la generalità della frazione continua, si ponno supporre tutti i denominatori n, n', n'', ec. positivi; ora se prendasi un sol termine della serie proposta, si avrà, per ipotesi, $\frac{m}{n}<1$. Se si prendano i due primi, a cagione di $\frac{m'}{n'}<1$, è chiaro che $n+\frac{m'}{n'}$ è maggiore di $n-1$; ma m è minore di n; e poi-

chè sono entrambi interi, m sarà pure minore di $n+\frac{m'}{n'}$. Adunque il valore che risulta dai due termini.

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'}}$$

è minore dell' unità. Calcoliamo tre termini della frazione continua proposta; e da prima, secondo ciò che si è dimostrato or ora, il valore della parte

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+}}$$

è minore dell'unità. Continuando il medesimo ragionamento, si vedrà che quale che siasi il numero dei termini che si calcolano della frazione continua proposta il valore che ne risulta è minore dell' unità; dunque il valore totale di questa frazione è anche minore dell' unità. Esso non potrebbe essere uguale all' unità che nel solo caso in cui la frazione proposta fosse della forma

$$\cfrac{m}{m+1-\cfrac{m'}{m'+1-\cfrac{m''}{m''+1-\text{ec.}}}}$$

In ogni altro caso sarà minore.

Ciò posto, se nieghisi che il valore della frazione continua proposta sia uguale a un numero irrazionale, supponiamo ch'è uguale a un numero razionale, e sia questo numero $\frac{B}{A}$, B e A essendo degli interi qualunque; si avrà dunque

$$\frac{B}{A}=\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\text{ec.}}}}$$

Siano C, D, E, ec. delle indeterminate tali che abbiasi

$$\frac{C}{B}=\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\text{ec.}}}}$$

$$\frac{D}{C}=\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\cfrac{m^{iv}}{n^{iv}+\text{ec.}}}}$$

e così all'infinito. Queste differenti frazioni continue avendo tutti i loro termini minori dell' unità, i loro valori o le loro somme $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, $\frac{E}{D}$, ec. saranno minori dell'unità, secondo ciò che si è or ora dimostrato, e così si avrà $B<A$, $C<B$, $D<C$, ec.; donde si vede che la serie A, B, C, D, E, ec. è decrescen-

te all' infinito. Ma l' incatenamento delle frazioni continue di cui si tratta dà

$$\frac{B}{A}=\cfrac{m}{n+\cfrac{C}{B}}\text{; donde risulta } C=mA-nB,$$

$$\frac{C}{B}=\cfrac{m'}{n'+\cfrac{D}{C}}\text{; donde risulta } D=m'B-n'C$$

$$\frac{D}{C}=\cfrac{m''}{n''+\cfrac{E}{D}}\text{; donde risulta } E=m''C-n''D,$$

E poichè i due primi numeri A e B sono interi, per ipotesi, ne segue che tutti gli altri C, D, E, ec. i quali fin a questo punto erano indeterminati, sono anche numeri interi. Ora, implica contraddizione che una serie infinita A, B, C, D, E, ec. sia ad un' ora decrescente e composta di numeri interi; perchè da altro canto niuno dei numeri A, B, C, D, E, ec. non può essere zero, atante che la frazione continua proposta si estende all' infinito, e che però le somme rappresentate da $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, ec. debbono essere sempre qualche cosa. Dunque l'ipotesi che la somma della frazione continua proposta è uguale a una quantità razionale $\frac{B}{A}$, non può sussistere; dunque questa somma è necessariamente un numero irrazionale.

L e m m a II. *Poste le medesime cose, se le frazioni componenti* $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, *sono di una grandezza qualunque al cominciamento della serie, ma dopo un certo intervallo siano costantemente minori dell' unità; io dico che la frazione continua proposta supponendo sempre ch' ella si estenda all' infinito, avrà un valore irrazionale.*

Imperocchè, se a contare da $\frac{m'''}{n'''}$, per esempio, tutte le frazioni $\frac{m'''}{n'''}$, $\frac{m^{IV}}{n^{IV}}$, $\frac{m^{V}}{n^{V}}$, all'infinito, sono minori dell'unità, allora, secondo il lemma I, la frazione continua

$$\cfrac{m'''}{n'''+\cfrac{m^{IV}}{n^{IV}+\cfrac{m^{V}}{n^{V}+\text{ec.}}}}$$

avrà un valore irrazionale. Chiamiamo ω questo valore, e la frazione continua proposta sarà

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\omega}}}$$

Ma se si fa successivamente

$$\frac{m''}{n''+\omega}=\omega',\ \frac{m'}{n'+\omega'}=\omega'',\ \frac{m}{n+\omega''}=\omega''',$$

è chiaro che essendo ω irrazionale, tutte le quantità ω', ω'', ω''', debbono essere parimente tali. Ora, l'ultima ω^{m} è uguale alla frazione continua proposta; dunque il valore di quest' ultima è irrazionale.

Possiamo ora, ritornando al nostro soggetto, dimostrare la seguente proposizione generale.

TEOREMA.

Se un arco è commensurabile col raggio, la sua tangente sarà incommensurabile col medesimo raggio.

In fatti, sia il raggio $= 1$, e l'arco $x = \frac{m}{n}$, essendo m ed n numeri interi, la formola trovata qui sopra darà, facendo la sostituzione,

$$\text{tang.}\ \frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \text{ec.}}}}}$$

Or questa frazione continua è nel caso del lemma II; perocchè è chiaro che i denominatori $3n$, $5n$, $7n$, ec. aumentando continuamente, mentre il numeratore m^2 resta della medesima grandezza, le frazioni componenti saranno o diverranno ben tosto minori dell' unità, dunque il valore di tang. $\frac{m}{n}$ è irrazionale; dunque *se l' arco è commensurabile col raggio, la sua tangente sarà incommensurabile*.

Da ciò risulta, come conseguenza immediata, la proposizione che forma l'obbietto di questa nota. Sia π la semicirconferenza il cui raggio è 1; se π fosse razionale, l'arco $\frac{\pi}{4}$ sarebbe pur tale, e per conseguenza la sua tangente dovrebbe essere irrazionale; ma si sa, al contrario, che la tangente dell' arco $\frac{\pi}{4}$ è uguale al raggio 1; dunque π non può essere razionale. Dunque *il rapporto della circonferenza al diametro, è un numero irrazionale* [1].

È probabile che il numero π non è compreso nè manco fra le quantità irrazionali algebriche, cioè che non può essere la radice di una equazione algebrica di un numero finito di termini i cui coefficienti sono razionali; ma pare difficilissimo di dimostrare questa proposizione rigorosamente; possiamo solo far vedere che il quadrato di π è anco un numero irrazionale.

[1] Questa proposizione è stata dimostrata per la prima volta dal Lambert, nelle Memorie di Berlino, anno 1761.

In fatti, se nella frazione continua che esprime tang. x, si fa $x=\pi$, a cagione di tang. $\pi=0$, si dee avere

$$0 = 5 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \cfrac{\pi^2}{9 - \text{ec.}}}}$$

Ma se π^2 fosse razionale, e si avesse $\pi^2=\frac{m}{n}$, essendo m ed n numeri interi, ne risulterebbe

$$3 = \cfrac{m}{5n - \cfrac{m}{7 - \cfrac{m}{9n - \cfrac{m}{11 - \text{ec.}}}}}$$

Ora è visibile che questa frazione continua è ancora nel caso del lemma II; il suo valore è dunque irrazionale, e non potrebbe essere uguale al nnmero 3. Dunque *il quadrato del rapporto della circonferenza al diametro è un numero irrazionale.*

NOTA V.

Nella quale si dà la soluzione analitica di vari problemi concernenti il triangolo, il quadrilatero iscritto, il parallelepippedo e la piramide triangolare.

PROBLEMA PRIMO.

Dati i tre lati di un triangolo, trovare la sua superficie, il raggio del cerchio iscritto e il raggio del cerchio circoscritto.

Siano i lati BC $=a$, (fig. 126) AC $=b$, AB $=c$: se dal vertice A si abbassi la perpendicolare AD sul lato opposto BC, si avrà $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BC\times BD$; dunque $BD=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$. Questo valore dà $\overline{AB}^2-\overline{BD}^2$ o $\overline{AD}^2=c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2=\frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$; dunque $AD=\frac{\sqrt{[4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2]}}{2a}$

Sia S l'aia del triangolo, si avrà $S=\frac{1}{2}BC\times AD$; dunque

$$S=\tfrac{1}{4}\sqrt{[4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2]}=\tfrac{1}{4}\sqrt{(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)}$$

Questa formola può anche ridursi ad un'altra formola più semplice pel calcolo logaritmico; per far ciò fa d'uopo osservare che la quantità $4a^2c^2-(a^2+$

c^2-b^2) è il prodotto dei due fattori $2ac+(a^2+c^2-b^2)$ e $2ac-(a^2+c^2-b^2)$; il primo $=(a+c)^2-b^2=(a+c+b)(a+c-b)$; il secondo $=b^2-(a-c)^2=(b+a-c)(b-a+c)$; dunque si avrà

$$S=\tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)](b+c-a)}.$$

Finalmente se si fa $\frac{a+b+c}{2}=p$, il che dà $a+b+c=2p$, $a+b-c=2p-2c$, $a+c-b=2p-2b$, $b+c-a=2p-2a$, si avrà ancora più semplicemente

$$S=\sqrt{(p.p-a.p-b.p-c)}.$$

Dal che vedesi che per avere la superficie di un triangolo i cui tre lati sono dati, bisogna prendere la semisomma dei tre lati, da questa semisomma togliere successivamente ciascuno dei lati, il che fornirà tre resti, moltiplicare questi tre resti fra loro e per la semisomma dei lati, e finalmente estrarre la radice quadrata dal prodotto; questa radice sarà l'aia del triangolo.

Sia ora z il raggio del cerchio circoscritto al triangolo, ed u il raggio del cerchio iscritto in questo medesimo triangolo, si avrà secondo la prop. XXXIV lib. III, $z=\frac{\frac{1}{4}abc}{S}$ ed $u=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{S}{p}$; dunque sostituendo il valore trovato di S, verrà $z=\frac{\frac{1}{4}abc}{\sqrt{(p.p-a.p-b.p-c)}}$, $u=\sqrt{\left(\frac{p-a.p-b.p-c}{p}\right)}$.

PROBLEMA II.

Dati i quattro lati di un quadrilatero iscritto, trovare il raggio del cerchio, la superficie del quadrilatero e i suoi angoli.

Siano i lati dati AB$=a$, (fig. 135) BC$=b$, CD$=c$, DA$=d$, e le diagonali incognite AC$=x$, BD$=y$, si avrà secondo il teor. XXXV lib. III, $xy=ac+bd$ ed $\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$, donde si ricava

$$x=\sqrt{\left(\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}\right)},\ y=\sqrt{\left(\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}\right)}.$$

Ma secondo il problema precedente, il raggio del cerchio circoscritto al triangolo ABC, i cui lati sono a, b, x, può esprimersi colla formola $z=\frac{abx}{\sqrt{[4a^2b^2-(a^2+b^2-x^2)^2]}}$. Sostituendo in vece di x il valore or ora trovato, e scomponendo il risultamento in fattori, si avrà

$$z=\sqrt{\left[\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)}\right]}$$

Ciò posto, l'aia del triangolo ABC $= \frac{\frac{1}{4} abx}{z}$, quella del triangolo ADC $= \frac{\frac{1}{4} cdx}{z}$; dunque l'aia del quadrilatero ABCD $= \frac{1}{4} \frac{(ab+cd)x}{z} = \frac{1}{4} \sqrt{} [(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)$. E se si faccia per brevità, $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$, si avrà l'aia ABCD $= \sqrt{(p-a.p-b.p-c.p-d)}$. Finalmente per avere uno degli angoli, per esempio, l'angolo B, si osserverà che il triangolo ABC dà $\cos. B = \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}$; sostituendo il valore di x e riducendo, si avrà $\cos. B = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}$. Di qui si ricava $\frac{1-\cos. B}{1+\cos. B}$, o $\text{tang.}^2 \frac{1}{2} B = \ldots\ldots$ $\frac{(c+a)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2-(c-d)^2} = \frac{(a+c+d-b)(b+c+d-a)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)}$. Dunque $\text{tang.} \frac{1}{2} B = \ldots\ldots$ $\sqrt{\left(\frac{p-a.p-b}{p-c.p-d}\right)}$.

PROBLEMA III.

Nel quadrilatero ABDC (fig. 277) *di cui gli angoli opposti* B *e* C *sono retti, essendo dati i due lati* AB, AC *coll'angolo compreso* BAC, *trovare gli altri due lati e la diagonale* AD.

Sia AC $=b$, AB $=c$, e l'angolo BAC $=$ A; se si prolunghi BD ed AC fino al loro incontro in E, il triangolo BAE rettangolo in B, nel quale si conosce l'angolo BAE e il lato AB, darà AE $= \frac{c}{\cos. A}$; dunque CE $= \frac{c}{\cos. A} - b$. Indi il triangolo DCE rettangolo in C nel quale si conosce il lato CE e l'angolo CDE $=$ A, darà CD $=$ CE cot. A $= \frac{c-b \cos. A}{\text{sen. } A}$. Si avrà dunque similmente BD $= \frac{b-c \cos. A}{\text{sen. } A}$. Questi sono i valori dei due lati richiesti del quadrilatero.

Da ciò risulta la diagonale AD $= \sqrt{(\overline{AC}^2+\overline{DC}^2)} = \sqrt{\left(b^2+\frac{(c-b\cos. A)^2}{\text{sen. } A}\right)}$ $= \frac{\sqrt{(b^2+c^2-2bc \cos. A)}}{\text{sen. } A}$. Ma dal triangolo BAC si avrebbe BC $= \sqrt{(b^2+c^2-2bc \cos. A)}$. Dunque la diagonale AD, che congiunge i due angoli obbliqui sta alla diagonale BC che congiunge i due angoli retti : : 1 : sen. A.

Scolio. La diagonale AD è in pari tempo il diametro del cerchio nel quale il quadrilatero ABDC sarebbe iscritto.

In questo cerchio si avrebbe l'angolo ABC $=$ ADC, dunque abbassando CF

perpendicolare sopra AB, i triangoli BFC, ADC sono simili e dànno AD BC : : AC : FC : : 1 : sen. A; il che si accorda col risultamento precedente.

PROBLEMA IV.

Dati i tre spigoli di un parallelepipedo coi tre angoli che fanno tra loro, trovare la solidità del parallelepipedo.

Siano gli spigoli $SA = f$ (fig. 278), $SB = g$, $SC = h$, e gli angoli compresi $ASB = \gamma$, $ASC = \beta$, $BSC = \alpha$. Se dal ponto C si abbassi CO perpendicolare sul piano ASB, il triangolo rettangolo CSO darà $CO = CS$ sen. $CSO = h$ sen. CSO. Da altro canto la superficie del parallelogrammo $ASBP = fg$ sen. γ. Dunque se si chiami S la solidità del parallelepipedo ST, si avrà $S = fgh$ sen. α sen. CSO. Rimane a trovare sen. CSO.

Per far ciò, dal punto S come centro, e con un raggio $= 1$, descrivasi una superficie sferica la quale incontri in D, E, F, G le rette SA, SB, SC, SO; si avrà un triangolo DEF nel quale l' arco FG è perpendicolare sopra ED, perchè il piano CSO è perpendicolare su ASB. Ora il triangolo DEF, nel quale si hanno i tre lati $DE = \gamma$, $DF = \beta$, $EF = \alpha$, dà $\cos. E = \dfrac{\cos.\beta - \cos.\alpha \cos.\gamma}{\text{sen.}\,\alpha\, \text{sen.}\,\gamma}$, e sen. $E = \dfrac{\sqrt{(1 - \cos.^2 \alpha - \cos.^2 \beta - \cos.^2 \gamma + 2\cos.\alpha \cos.\beta \cos.\gamma)}}{\text{sen.}\,\alpha\, \text{sen.}\,\gamma}$. Indi il triangolo rettangolo EFG dà sen. GF o sen. CSO = sen. E sen. EF = sen. α sen. E. Dunque $S = fgh$ sen. α sen. γ sen. E, o $S = fgh \sqrt{(1 - \cos.^2\alpha - \cos.^2\beta - \cos.^2\gamma + 2\cos.\alpha \cos.\beta \cos.\gamma)}$. In questa espressione la quantità sotto il radicale è il prodotto dei due fattori sen. α sen. γ + cos. β − cos. α cos. γ e sen. α sen. γ − cos. β + cos. α cos. γ. Il primo $= \cos.\beta - \cos.(\alpha+\gamma) = 2\,\text{sen.}\,\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\text{sen.}\,\dfrac{\alpha+\gamma-\beta}{2}$ il secondo $= \cos.(\alpha-\gamma) - \cos.\beta = 2\,\text{sen.}\,\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\,\text{sen.}\,\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$. Dunque la solidità cercata $S = 2fgh\sqrt{\left[\text{sen.}\,\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\text{sen.}\,\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\,\text{sen.}\,\dfrac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\,\text{sen.}\,\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right]}$.

PROBLEMA V.

Date le stesse cose del problema precedente, trovare l' espressione della diagonale che congiunge due vertici opposti.

Sia la diagonale della base $SP = z$ (fig. 278) e la diagonale cercata $ST = u$; il triangolo ASP nel quale cos. SAP = − cos. γ, darà $z^2 = f^2 + g^2 + 2fg \cos.\gamma$; parimente il triangolo TSP nel quale cos. TPS = − cos. CSP, darà $u^2 = z^2 +$

$h^2 + 2hz$ cos. CSP. Non trattasi più che d'avere il coseno dell'angolo CSP o dell'arco FH; ora nel triaogolo sferico EFH, si ha cos. FH = cos. EF cos. EH + sen. EF sen. EH cos. E; sostituendo i valori EF $= \alpha$ e cos. E $= \dfrac{\cos.\beta - \cos.\alpha \cos.\gamma}{\text{sen.}\alpha\ \text{sen.}\gamma}$, verrà cos. FH = cos. α cos. EH $+ \dfrac{\text{sen. EH}}{\text{sen.}\gamma}(\cos.\beta - \cos.\alpha \cos.\gamma) = \dfrac{\text{sen. EH}\cos.\beta}{\text{sen.}\gamma} + \dfrac{\text{sen.}(\gamma - \text{EH}).\cos.\alpha}{\text{sen.}\gamma} = \dfrac{\text{sen. EH}\cos.\beta}{\text{sen.}\gamma} + \dfrac{\text{sen. DH}\cos.\alpha}{\text{sen.}\gamma}$. Dunque $2hz$ cos. FH, o $2hz$ cos. CSP $= 2h \cos.\beta \dfrac{z\ \text{sen. EH}}{\text{sen.}\gamma} + 2h\cos.\alpha \dfrac{z\ \text{sen. DH}}{\text{sen.}\gamma}$. Ma nel triangolo BSP si ha BP $= \dfrac{\text{SP sen. BSP}}{\text{sen. SBP}}$ e BS $= \dfrac{\text{SP sen. BPS}}{\text{sen. SBP}}$, il che dà $\dfrac{z\ \text{sen. EH}}{\text{sen.}\gamma} = f$ e $\dfrac{z\ \text{sen. DH}}{\text{sen.}\gamma} = g$. Dunque $2hz$ cos. CSP $= 2fh\cos.\beta + 2gh\cos.\alpha$. Dunque finalmente il quadrato della diagonale cercata:

$$u^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg\cos.\gamma + 2fh\cos.\beta + 2gh\cos.\alpha$$

Corollario. L'angolo triedro A è formato dagli spigoli f, g, h che fanno tra loro a due a due gli angoli $200° - \gamma$, $200° - \beta$, α; così basta cangiare i segni di cos. γ e cos. β nell'espressione di $\overline{SE}^2$ per aver quella di $\overline{AM}^2$. Facendo lo stesso per le altre due diagonali, si avranno i valori dei loro quadrati come segue:

$$\begin{aligned}
\overline{ST}^2 &= f^2 + g^2 + h^2 + 2fg\cos.\gamma + 2fh\cos.\beta + 2gh\cos.\alpha \\
\overline{AM}^2 &= f^2 + g^2 + h^2 - 2fg\cos.\gamma - 2fh\cos.\beta + 2gh\cos.\alpha \\
\overline{BN}^2 &= f^2 + g^2 + h^2 - 2fg\cos.\gamma + 2fh\cos.\beta - 2gh\cos.\alpha \\
\overline{CP}^2 &= f^2 + g^2 + h^2 + 2fg\cos.\gamma - 2fh\cos.\beta - 2gh\cos.\alpha
\end{aligned}$$

Di qui si deduce $\overline{ST}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CP}^2 = 4f^2 + 4g^2 + 4h^2$. Dunque *in ogni parallelepippedo la somma dei quadrati delle quattro diagonali è uguale alla somma dei quadrati delle dodici costole*. Questo notevole problema e analogo a quello che ha luogo nel parallelogrammo (14, 3 part. I) potrebbesi dedurre immediatamente da quest'ultimo. Imperocchè per mezzo dei parallelogrammi SCTP, ABMN, si ha

$$\overline{ST}^2 + \overline{CP}^2 = 2\overline{SC}^2 + 2\overline{SP}^2$$
$$\overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 = 2\overline{BM}^2 + 2\overline{AB}^2.$$

Sommando queste due uguaglianze e osservando che si ha SC = BM ed $\overline{SP}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{SA}^2 + 2\overline{SB}^2$, verrà $\overline{ST}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CP}^2 = 4\overline{SA}^2 + 4\overline{SB}^2 + 4\overline{SC}^2$.

PROBLEMA VI.

Date le tre costole che metton capo a uno stesso vertice di un tetraedro, e i tre angoli che queste costole formano tra loro, trovare la solidità del tetraedro.

Sia SABC (fig. 278) il tetraedro proposto, nel quale si conoscono le costole $SA=f$, $SB=g$, $SC=h$, e gli angoli compresi $ASB=\gamma$, $ASC=\beta$, $BSC=\alpha$. Se sulle costole SA, SB, SC date di grandezza e di posizione, si descriva il parallelepippedo ST, il tetraedro che è la terza parte del prisma triangolare BSANMC sarà la sesta parte del parallelepippedo ST. Dunque chiamando P la solidità del tetraedro, si avrà dal problema IV, $P=\frac{1}{6}fgh\sqrt{(1-\cos.^2\alpha-\cos.^2\beta-\cos.^2\gamma+2\cos.\alpha\cos.\beta\cos.\gamma)}$ o $P=\frac{1}{3}fgh\sqrt{\left[\text{sen.}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\ \text{sen.}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\ \text{sen.}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\ \text{sen.}\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2}\right]}$.

PROBLEMA VII.

Dati i sei lati o spigoli di un tetraedro, trovare la sua solidità.

Se si serbino le medesime denominazioni del problema precedente, e si faccia di più $BC=f'$, (fig. 278) $CA=g'$, $BA=h'$, si avrà $\cos.\gamma=\frac{f^2+g^2-h'^2}{2fg}$ $\cos.\beta=\frac{f^2+h^2-g'^2}{2fh}$, $\cos.\alpha=\frac{g^2+h^2-f'^2}{2}$. Sostituendo questi valori nella formola trovata, e facendo, per brevità, $g^2+h^2-f'^2=F$, $f^2+h^2-g'^2=G$, $f^2+g^2-h'^2=H$, si avrà la solidità cercata $P=\frac{1}{12}\sqrt{(4f^2g^2h^2-f^2F^2-g^2G^2-h^2H^2+FGH)}$.

Nell' applicazione di queste formole si osserverà che f', g', h' dinotano i lati di una stessa faccia o base, e f, g, h le altre costole che metton capo al vertice, sendo tale la disposizion loro che f è opposta a f', g a g' ed h ad h'.

Scolio. Sia A la somma dei quattro triangoli che compongono la superficie del tetraedro, sia r il raggio della sfera iscritta; è facile vedere che si ha $P=A\times\frac{1}{3}r$, perchè si può concepire il tetraedro diviso in quattro altri, che abbiano per centro comune il centro della sfera e per basi le varie facce di esso tetraedro. Si ha dunque il raggio della sfera iscritta $r=\frac{3P}{A}$.

PROBLEMA VIII.

Date le medesime cose del problema VI, trovare il raggio della sfera circoscritta al tetraedro.

Sia M (fig. 279) il centro del cerchio circoscritto al triangolo SAB, MO la perpendicolare condotta dal punto M sul piano SAB; sia parimente N il centro del cerchio iscritto al triangolo SAC, NO la perpendicolare elevata dal punto N sul piano SAC. Queste due perpendicolari situate in uno stesso piano MDN perpendicolare ad SA, s'incontreranno in un punto O che sarà il centro della sfera circoscritta; perchè il punto O, come appartenente alla perpendicolare MO è ad uguale distanza dai tre punti S, B, A; e questo stesso punto, come appartenente alla perpendicolare NO è ad uguale distanza dai tre punti S, A, C; dunque esso è ad uguale distanza dai quattro punti S, A, B, C.

Si può immaginare che il punto M è determinato nel piano SAB, per mezzo del quadrilatero SDMH, del quale i due angoli D ed H sono retti, e in cui si ha $SD = \frac{1}{2}f$, $SH = \frac{1}{2}g$, ed $ASB = \gamma$. Si avrà dunque (secondo il problema III),

$$DM = \frac{\frac{1}{2}g - \frac{1}{2}f\cos.\gamma}{\text{sen.}\,\gamma};\ \text{parimente si avrà}\ DN = \frac{\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}f\cos.\beta}{\text{sen.}\,\beta}.$$

Chiamiamo D l'angolo MDN che misura l'inclinazione dei due piani SAB, SAC; nel triangolo sferico i cui lati sono α, β, γ, D sarà l'angolo opposto al lato α, e così si avrà $\cos.\,D = \frac{\cos.\,\alpha - \cos.\,\gamma\cos.\,\beta}{\text{sen.}\,\gamma\,\text{sen.}\,\beta}$, di modo che l'angolo D può supporsi noto.

Posto ciò, nel quadrilatero OMDN nel quale i due angoli M ad N sono retti, e in cui si conoscono i due lati MD, DN e l'angolo compreso $MDN = D$, si avrà, per il problema III, il quadrato della diagonale $\overline{OD}^2 = \frac{\overline{DM}^2 + \overline{DN}^2}{\text{sen.}^2 D}$ $\frac{2DM \times DN\cos.\,D.}{\text{sen.}^2 D}$ Poscia nel triangolo OSD rettangolo in D, si avrà $\overline{SO}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{SD}^2$; e questo è il valore del quadrato del raggio della sfera circoscritta.

Se si fa la sostituzione dei valori di DM, DN, ed indi quella dei valori di cos. D e di sen. D, a fin di avere immediatamente l'espressione del raggio SO, per mezzo dei dati del problema VI, si troverà per risultamento.

$$SO = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{f^2\,\text{sen.}^2\alpha + g^2\,\text{sen.}^2\beta + h^2\,\text{sen.}^2\gamma - 2fg(\cos.\,\gamma - \cos.\,\beta\cos.\,\alpha) - 2fh(\cos.\,\beta - \cos.\,\alpha\cos.\,\gamma) - 2gh(\cos.\,\alpha - \cos.\,\gamma\cos\,\beta)}{1 - \cos.^2\alpha - \cos.^2\beta - \cos.^2\gamma + 2\cos.\,\alpha\cos.\,\beta\cos.\,\gamma}\right\}}$$

NOTA VI.

Sulla proposizione XXV, libro III, parte II.

Questo teorema che l'Eulero per il primo ha dimostrato nelle Memorie di Pietroburgo, anno 1758, offre parecchie conseguenze che meritano di essere svolte.

1° Sia a il numero dei triangoli, b il numero dei quadrilateri, c il numero dei pentagoni, ec. che compongono la superficie di un poliedro; il numero totale delle facce sarà $a+b+c+d+$ec., e il numero totale dei loro lati sarà $3a+4b+5c+6d+$ec. Quest'ultimo numero è doppio di quello delle costole, perchè la stessa costola appartiene a due facce; così avrassi

$$H=a+b+c+d+\text{ec.}$$
$$2A=3a+4b+5c+6d+\text{ec.}$$

E poichè, secondo il teorema di cui si tratta, $S+H=A+2$, se ne ricava

$$2S=4+a+2b+3c+4d+\text{ec.}$$

Una prima osservazione che forniscono questi valori si è che il numero delle facce impari $a+c+e+$ec. è sempre pari.

Si può fare, per brevità, $\omega=b+2c+3d+$ec., e allora si avrà

$$A=\tfrac{3}{2}H+\tfrac{1}{2}\omega,$$
$$S=2+\tfrac{1}{2}H+\tfrac{1}{2}\omega.$$

E così in ogni poliedro si ha sempre $A>\frac{3}{2}H$, ed $S>2+\frac{1}{2}H$, dove bisogna osservare che il segno $>$ non esclude l'uguaglianza, atteso che potrebbesi avere $\omega=0$.

Il numero di tutti gli angoli rettilinei del poliedro è $2A$; quello degli angoli poliedri è S, in modo che il numero medio degli angoli rettilinei che formano ciascun angolo poliedro è $\frac{2A}{S}$.

Questo numero non può essere minore di 3, perchè ci abbisognano almeno tre angoli rettilinei per formare un angolo poliedro; così devesi avere $2A>3S$, non escludendosi l'uguaglianza nel segno $>$. Se si pongono in luogo di A ed S i loro valori in H ed ω, si avrà $3H+\omega>6+\frac{3}{2}H+\frac{3}{2}\omega$, o $3H>12+\omega$. Rimettendo i valori di H ed ω in a, b, c, ec., ne risulterà

$$3a+2b+c>12+e+2f+3g+\text{ec},$$

donde si vede che a, b, c non possono essere zero insieme, e che però non esiste niun poliedro di cui tutte le facce abbiano più di cinque lati.

Poichè si ha $H>4+\frac{1}{3}\varpi$, la sostituzione nei valori di S e di A darà $S>4+\frac{2}{3}\varpi$, ed $A>6+\varpi$. Ma nello stesso tempo si ha $\varpi<3H-12$; e di qui risulta $S<2H-4$, ed $A<3H-6$, dove è da rammentarsi che i segni $>$ e $<$ non escludono l'eguaglianza. Questi limiti hanno luogo generalmente in tutti i poliedri.

2° Supponiamo $2A>4S$, il che conviene ad una infinità di poliedri, e precipuamente a quelli di cui tutti gli angoli poliedri sono formati da quattro piani o più, si avrà in questo caso $H>8+\varpi$, ovvero, facendo la sostituzione,

$$a>8+c+2d+3e+\text{ec.}$$

Adunque fa d'uopo che il solido abbia almeno otto facce triangolari; il limite $H>8+\varpi$ dà $S>6+\varpi$, ed $A>12+2\varpi$. Ma si è avuto nello stesso tempo $\varpi<H-8$; e di qui risulta $S<H-2$, $A<2H-4$.

3° Supponiamo $2A>5S$, il che racchiude fra gli altri poliedri quelli di cui tutti gli angoli sono almeno pentaedri, ne risulterà $H>20+3\varpi$, o

$$a>20+2b+5c+8d+\text{ec.}$$

E si avrà in pari tempo $S>12+2\varpi$, ed $A>30+5\varpi$; finalmente dall'essere $\varpi<\frac{1}{3}(H-20)$, se ne ricavano i limiti $S<\frac{2}{3}(H-2)$, $A<\frac{5}{3}(H-2)$.

Non si può supporre $2A=6S$; perchè si ha in generale $2A+2\varpi+12=6S$; non ci ha dunque alcun poliedro i cui angoli siano tutti formati da sei angoli rettilinei o più; ed infatti il minimo valore che avrebbe ciascun angolo rettilineo, l'uno per l'altro, sarebbe l'angolo di un triangolo equilatero, e sei di questi angoli farebbero quattro angoli retti, la quale somma è troppo grande per un angolo poliedro.

4° Consideriamo un poliedro le cui facce siano tutte triangolari, si avrà $\varpi=0$, il che darà $A=\frac{3}{2}H$, ed $S=2+\frac{1}{2}H$. Supponiamo in oltre che tutti gli angoli del poliedro siano parte pentaedri, parte esaedri; sia p il numero degli angoli pentaedri, q quello degli esaedri, si avrà $S=p+q$ e $2A=5p+6q$, il che dà $6S-2A=p$; ma da altra parte si ha $A=\frac{3}{2}H$ ed $S=2+\frac{1}{2}H$; dunque $p=6S-2A=12$. Dunque *se un poliedro ha tutte le sue facce triangolari, e i suoi angoli siano parte pentaedri, parte esaedri, gli angoli pentaedri saranno sempre 12 di numero.* Gli esaedri ponno essere di un numero qualunque, sicchè lasciando q indeterminato, si avrà in tutti cotesti solidi $S=12+q$, $H=20+2q$, $A=30+3q$.

Termineremo queste applicazioni con la ricerca del numero delle condizioni o dati necessari per determinare un poliedro; questione di non lieve momento; e che pare non siasi per anco risoluta.

Suppooiamo primamente che il poliedro sia di una *specie determinata*, cioè che conoscasi il oumero delle sue facce, il oumero del loro lati individualmente, e la disposizioo loro rispettiva. Aduoque si conoscono i oumeri H, S, A, come pure a, b, c, d, ec.; oon trattasi più che di avere il oumero dei dati effettivi, linee od aogoli, per mezzo dei quali il poliedro può essere costruito e determinato.

Consideriamo ooa delle facce del poliedro ehe preoderemo per base. Sia n il numero dei sooi lati; bisogneraooo $2n-3$ condiziooi per determinare questa base. Il nomero degli angoli poliedri fuori di questa base è $S-n$; il vertice di ciascun angolo esige tre dati per la sua determioazione; sicchè la posizione di $S-n$ vertici esigerebbe $3S-3n$ dati, ai qoali aggiungendo i $2n-3$ della base, si avrebbe in totto $3S-n-3$. Ma qnesto numero è geoeralmente troppo grande, e dee essere diminuito del oumero delle coodizioni necessarie perchè i vertici che corrispondono a una medesima faccia siano in un medesimo piano. Abbiamo chiamato n il oomero dei lati della base; chiamiamo parimente n', n'', ec. il numero dei lati delle altre facee. Tre punti determinano no piano; laonde quello che si troverà più di 3 io ciascuno dei oumeri n', n'', ec. darà altrettante condizioni perchè i differeoti vertici siano situati nei piani delle facce alle quali essi appartengono, e il numero totale di queste condiziooi sarà uguale alla somma $(n'-3)+(n''-3)+(n'''-3)+$ ec. Ma il numero dei termini di questa serie è $H-1$, e d'altra parte $n+n'+n''+\text{ec.}=2A$; dunque la somma della serie sarà $2A-n-3(H-1)$. Sottraendo questa somma da $3S-n-3$, resterà $3S-2A+3H-6$, quaotità che a cagione di $S+H=A+2$, riduecsi ad A. Dunque *il numero dei dati necessari per determinare un poliedro, fra tutti quelli della medesima specie, è uguale al numero delle sue costole.*

Si osservi intaoto che i dati di eoi si tratta oon debbono già esser presi a caso fra le rette e gli angoli che costituiscono gli elementi del poliedro; perocchè, comooque si abbiano taote equazioni quante incognite, potrebbe avveoire che alcune relazio oi fra le qoaotità note rendessero il problema indeterminato. Così parrebbe, dietro il teorema or ora trovato, ehe la conoscenza delle sole costole basti in generale per determioare un poliedro; ma ci hanno dei casi io eui questa conoscenza noo è sufficiente. Per esempio, dato un prisma non triangolare qoalonque, si potrà formare ona iofioità di altri prismi che avraooo le costole uguali e situate della stessa maniera. Imperocchè, sempre che la base abbia più di tre lati, si possooo conservaodo i lati, cangiare gli aogoli, e dare così a questa base infinite forme differenti; aoche si può cangiare la posizione della costola longitudinale del prisma per rapporto al piano della base, finalmente si possooo operare questi due cambiamenti insieme; e oe risulterà sempre uo prisma le eui eostole o lati oon avraono caogiato. Dal che si vede che le costole sole non bastano in questo caso per determinare il poliedro.

I dati ehe fa d' uopo prendere per determinare un poliedro sono quelli che non lasciano indeterminazione alcuna, e ehe noo dànno assolutamente che una sola soluzione. E da prima la base ABCDE (fig. 281) sarà determioata, infra altre

maniere, se si conosce il lato AB, cogli angoli adiacenti BAC, ABC, pel ponto C; gli angoli BAD, ABD pel puoto D, e così degli altri. Sia poi M un punto del quale è mestieri determinare la posizione fuori il piano della base; questo punto sarà determinato, se, immaginando la piramide MABC, o solamente il piano MAB, si conoscessero gli angoli MAB, ABM, e l'inclinazione del piano MAB sulla base ABC. Se si determina, per mezzo di tre lati dati, la posizione di ciascuno dei vertici del poliedro fuori del piano della base, è chiaro che il poliedro sarà determinato assolutamente e in modo unico, sicchè due poliedri costruiti coi medesimi dati saranoo necessariamente ugoali; sarebbero frattanto simmetrici l'uno dell'altro, se fossero costruiti da differenti parti del piano della base.

Non è sempre necessario di avere tre dati per determinare ciascun vertice di un poliedro; perchè se il punto M dee trovarsi sopra un piano già determinato la cui intersezione colla base sia FG, basterà, dopo aver preso FG ad arbitrio, conoscere gli angoli MGF, MFG; così bisogoerà un dato di meno. Se il punto M dee trovarsi su due piani già determinati, o sulla loro comune intersezione MK la quale incontra il piano ABC in K, si conoscerà già il lato AK, l'angolo AKM, e l'inclinazione del piano AKM sulla base; basterà dunque di avere per un nuovo dato l'angolo MAK. Ed è così che il numero dei dati necessari per determinare un poliedro assolutamente e in un modo unico si ridurrà sempre al numero delle sue costole A.

Il lato AB e un numero A—1 di angoli dati determinano un poliedro; un altro lato ad arbitrio e i medesimi angoli determineranno un poliedro simile. Donde segue che *il numero delle condizioni necessarie perchè due poliedri della medesima specie siano simili è uguale al numero delle costole men uno.*

La questione qui risolta sarebbe di molto più semplice se non si coooscesse la specie del poliedro, ma solamente il numero dei suoi aogoli poliedri S. Si determino allora tre vertici ad arbitrio per mezzo di un triangolo nel quale vi saranno tre dati; questo triangolo sarà riguardato come la base del poliedro, indi i vertici fuori di questa base saranno di numero S—3; e richiedendo tre dati la determinazione di ciascuoo di essi, è chiaro che il numero totale dei dati necessari per determinare il poliedro sarà 3+3(S—3) o 3S—6.

Ci abbisogneranno dunque 3S — 7 condizioni perchè due poliedri che hanno un ugual numero S di angoli poliedri siano simili fra di loro.

NOTA VII.

Sui poliedri regolari. (Veggasi l'appendice al libro III, part. II).

Nella proposizione II di cotesto appendice noi ci siamo adoperati a dimostrare l'esistenza dei cinque poliedri regolari, cioè la possibilità di riunire un certo numero di piani uguali in modo che ne risulti un poliedro uniforme in tutta la sua estensione. Ci è sembrato che in altre opere questa riunione si supponga e-

sistere, senza renderne troppo ragione; ovvero non la si dimostra che, come ha fatto Euclide, con figure complicate e difficili a comprendersi.

Il problema di determinare l' inclinazione di due facce adiacenti del poliedro, e quello di determinare i raggi delle sfere iscritta e circoscritta, riducoosi uei problemi III e IV a costruzioni assai semplici; tuttavia non sarà inutile di applicare a questi medesimi problemi il calcolo trigonometrico che da altro canto fornirà novelle proposizioni.

Siano a, b, c (fig. 222) I tre angoli rettilinei che compongono l' angolo triedro O, e sia proposto di trovare l' inclinazione dei due piani ove sono gli angoli a e b; si descriverà col centro O il triaogolo sferico ABC nel quale si cooosceranno i tre lati $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, e bisognerà trovare l'angolo C compreso fra i lati a e b. Ora, per le note formole, si ha $\cos. C = \frac{\cos. c - \cos. a - \cos. b}{\text{sen.}\, a\ \text{sen.}\, b}$

Questa formola applicata ai cinque poliedri regolari, ci farà conoscere l' inclinazione di due facce adiaceoti in ciascuno di questi solidi.

Nel tetraedro (fig. 243), i tre angoli rettilinei che compongono l' angolo triedro S, sono angoli di triangoli equilateri; sia dunque la semicirconferenza o l' arco di $200^\circ = \pi$, si avrà $a=b=c=\frac{1}{3}\pi$; dunque $\cos. C = \frac{\cos. a - \cos.^2 a}{\text{sen.}^2 a} = \frac{\cos. a\,(1-\cos. a)}{1-\cos.^2 a} = \frac{\cos. a}{1+\cos. a}$; ma si sa che $\cos. \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$, dunque $\cos. C = \frac{1}{3}$.

Nell' esaedro (fig. 244) o cubo, i tre angoli rettilinei che formano l' aogolo triedro A, sono angoli retti; sicchè hassi $a=b=c=\frac{1}{2}\pi$, e $\cos. a =$, o dunque $\cos. C = 0$. Dunque l' angolo di due facce adiaceoti è un angolo retto.

Nell' ottaedro (fig. 245) se si fa $a = DAS = \frac{1}{3}\pi$, $b = DAT, = \frac{1}{3}\pi$, $c = TAS = \frac{1}{2}\pi$,

si avrà $\cos. C = \frac{\cos. \frac{1}{2}\pi - \cos.^2 \frac{1}{3}\pi}{\text{sen.}^2 \frac{3}{4}\pi}$. Ora, $\cos. \frac{1}{2}\pi = 0$, $\cos. \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$, $\text{sen.} \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; dunque $\cos. C - \frac{1}{3}$. Donde si vede che l' inclinazioue delle facce dell' ottaedro e l'inclinazione delle facce del tetraedro sono due angoli supplementari l'uno dell' altro.

Nel dodecaedro (fig. 246) un angolo triedro è formato da tre angoli di un pentagono regolare; dunque, facendo $a=b=c=\frac{3}{5}\pi$, si avrà $\cos. C = \frac{\cos. a}{1+\cos. a}$; ma $\cos. \frac{3}{5}\pi = -\text{sen.} \frac{1}{10}\pi = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$, dunque $\cos. C = \frac{1-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, sen. $C = \frac{2}{\sqrt{5}}$, e tang. $C = -2$.

Nell' icosaedro (fig. 247), bisogna fare $c = C'B'D' = \frac{3}{5}\pi$, $a = b = C'B'A' = \frac{1}{3}\pi$, e

si avrà $\cos. C = \dfrac{\cos. \frac{3}{5}\pi - \cos.^2 \frac{1}{3}\pi}{\text{sen}.^2 \frac{1}{3}\pi} = \dfrac{\frac{1}{4}(1-\sqrt{5}) - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{-\sqrt{5}}{3}$; dunque sen. C $= \frac{2}{3}$. Tali sono le espressioni semplicissime per le quali si determina l'inclinazione di due facce nei cinque poliedri regolari. Ma osserveremo che sarebbesi potuto comprenderle in una sola e medesima formola.

In fatti, sia n il numero dei lati di ciascuna faccia, m il numero degli angoli rettilinei che si riuniscono in ciascun angolo poliedro; se dal centro O (fig. 248) e con un raggio $= 1$, si descriva una superficie sferica che incontri in p, q, r, le rette OA, OC, OD, si avrà un triangolo sferico pqr nel quale si conosce l'angolo retto r, l'angolo $p = \dfrac{\pi}{m}$, e l'angolo $q = \dfrac{\pi}{n}$; si avrà dunque, per le note formole, $\cos. qr = \dfrac{\cos. p}{\text{sen}. q}$. Ma sen. $qr =$ sen. COD $=$ sen. CDO $=$ sen. $\frac{1}{2}$ C, dinotando C l'angolo CDE; dunque sen. $\frac{1}{2}\, C = \dfrac{\cos. \frac{\pi}{m}}{\text{sen}. \frac{\pi}{n}}$. Formola generale che applicata successivamente ai cinque poliedri, darebbe gli stessi valori di cos. C o di $1 - 2\ \text{sen}.^2 \frac{1}{2}\, C$ che si sono trovati per un'altra via; a tal uopo, bisogna sostituire in ciascun caso, i valori di m a di n, cioè:

	Tetraedro,	Esaedro,	Ottaedro,	Dodecaedro,	Icosaedro.
$m=$	3,	3,	4,	3,	5.
$n=$	3,	4,	3,	5,	3.

Il medesimo triangolo sferico pqr, dal quale si è or ora dedotta l'inclinazione di due facce adiacenti, dà $\cos. pq = \cot. p \cot. q$, o $\dfrac{CO}{OA} = \cot. \dfrac{\pi}{m} \cot. \dfrac{\pi}{n}$. Dunque, se si chiami R il raggio della sfera circoscritta al poliedro, ed r il raggio della sfera iscritta nel medesimo poliedro, si avrà $\dfrac{R}{r} = \text{tang}. \dfrac{\pi}{m}\ \text{tang}. \dfrac{\pi}{n}$;

da altra parte facendo il lato $AB = a$, si ha $CA = \dfrac{\frac{1}{2}a}{\text{sen}. \frac{\pi}{n}}$, e per conseguenza

$R^2 = r^2 + \dfrac{\frac{1}{4}a^2}{\text{sen}.^2 \frac{\pi}{n}}$. Queste due equazioni daranno per ciascun poliedro i valo-

ri dei raggi R ed r delle sfere circoscritta e iscritta. Si ha pure, supponendo C nota, $r=\frac{1}{2}a\cos.\frac{\pi}{n}$ tang. $\frac{1}{2}$ C, ed $R=\frac{1}{2}a$ tang. $\frac{\pi}{m}$ tang. $\frac{1}{2}$ C.

Nel dodecaedro e nell' icosaedro, vedesi che il rapporto $\frac{R}{r}$ ha il medesimo valore tang. $\frac{\pi}{5}$ tang. $\frac{\pi}{3}$. Dunque, se R è lo stesso per entrambi, r sarà pure lo stesso; cioè che se questi due poliedri sono iscritti in una medesima sfera, saranno anche circoscritti a una medesima sfera e viceversa. La stessa proprietà ha luogo tra l'esaedro e l'ottaedro, poichè il valore di $\frac{R}{r}$ è per entrambi tang. $\frac{\pi}{3}$ tang. $\frac{\pi}{4}$.

È buono osservare che i poliedri regolari non sono i soli solidi che siano compresi da poligoni regolari uguali; perchè se si addossano con una faccia comune due tetraedri regolari uguali, ne risulterà un solido compreso da sei triangoli uguali ed equilateri. Anche potrebbesi formare un altro solido con dieci triangoli eguali ed equilateri; ma i poliedri regolari sono i soli che abbiano nello stesso tempo gli angoli poliedri uguali.

NOTA VIII.

Sull' aia del triangolo sferico.

Sia 1 il raggio della sfera, π la semicirconferenza di un cerchio massimo; siano a, b, c i tre lati di un triangolo sferico; A, B, C gli archi di cerchio massimo che misurano gli angoli opposti. Sia $A+B+C-\pi=S$; secondo quello che si è dimostrato nel testo (23, 3, part. II) l'aia del triangolo sferico è uguale all'arco S moltiplicato pel raggio, e quindi è rappresentato da S. Ora, per le analogie di *Nepero*, si ha:

$$\text{tang.}\,\frac{A+B}{2}:\cot.\,\frac{C}{2}::\cos.\,\frac{a-b}{2}:\cos.\,\frac{a+b}{2};$$

di qui ricavando il valore di tang. $\frac{1}{2}(A+B)$, se ne dedurrà facilmente quello di tang. $(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)=-\cot.\frac{1}{2}S$; si avrà così

$$\cot.\frac{1}{2}S=\frac{\cot.\frac{1}{2}a\ \cot.\frac{1}{2}b+\cos.C}{\text{sen}.C},$$

formola semplicissima che può servire a calcolar l'aia di un triangolo sferico quando si conoscessero due lati a e b e l'angolo compreso C. Se ne ponno anche dedurre varie notevoli conseguenze.

1° Se l'angolo C è costante, al pari del prodotto $\frac{a}{2}$ cot. $\frac{b}{2}$, l'aia del triangolo sferico rappresentata da S, rimarrà costante. Dunque due triangoli CAB, CDE (fig. 282) i quali hanno un angolo uguale C, saranno equivalenti, se si ha tang. $\frac{1}{2}$CA : tang. $\frac{1}{2}$ CD : : tang. $\frac{1}{2}$ CE : tang. $\frac{1}{2}$ CB, cioè se le tangenti delle metà dei lati che comprendono l'angolo uguale sono reciprocamente proporzionali.

2° Per fare sul lato dato CD e col medesimo angolo C un angolo CDE equivalente al triangolo dato CAB, bisogna determinare CE colla proporzione:

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{CD} : \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{CA} : : \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{CB} : \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{CE}.$$

3° Per fare coll'angolo al vertice C un triangolo isoscela DCE equivalente al triangolo dato CAB, bisogna prendere tang. $\frac{1}{2}$ CD, o tang. $\frac{1}{2}$ CE media proporzionale fra tang. $\frac{1}{2}$ CA e tang. $\frac{1}{2}$ CB.

4° La stessa formola $\cot.\frac{1}{2}\,S = \dfrac{\cot.\frac{1}{2}a\ \cot.\frac{1}{2}b + \cos.\ C}{\text{sen.}\ C}$ può servire a dimostrare in un modo semplicissimo la proposizione XXVI del libro III; cioè che di tutti i triangoli sferici formati con due lati dati a e b, il maggiore è quello nel quale l'angolo C compreso dai lati dati è uguale alla somma dei due altri angoli A e B.

Col raggio OZ=1 (fig. 283) descrivasi la semicirconferenza VMZ, facciasi l'arco ZX = C, e dall'altra parte del centro prendasi OP = cot. $\frac{1}{2}a$ cot. $\frac{1}{2}b$; finalmente si congiunga PX e si abbassi XY perpendicolare sopra PZ.

Nel triangolo rettangolo PXY si ha $\cos.\ P = \dfrac{PY}{XY} = \dfrac{\cot.\frac{1}{2}\cot.\frac{1}{2}b + \cos.\ C}{\text{sen.}\ C}$;

dunque $P = \frac{1}{2}S$; dunque la superficie S sarà un *massimo*, se l'angolo P è pur massimo. Ora, è evidente che se si conduca PM tangente alla circonferenza, l'angolo MPO sarà il *massimo* dagli angoli P, e allora si avrà $MPO = MOZ - \frac{1}{2}\pi$. Dunque il triangolo sferico, formato con due lati dati, sarà un *massimo* se si ha $\frac{1}{2}S = C - \frac{1}{2}\pi$, o C=A+B, il che si accorda colla proposizione citata.

Vedesi in pari tempo, da questa costruzione, che non sarebbevi luogo a *mas-*

simo se il punto P fosse dentro del cerchio, cioè se si avesse $\cot.\frac{1}{2}a \cot.\frac{1}{2}b<1$. Condizione dalla quale ricavasi successivamente $\cot.\frac{1}{2}a < \text{tang.}\frac{1}{2}b$, $\text{tang.}\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}a\right)<\text{tang.}\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}a<\frac{1}{2}b$, e finalmente $\pi<a+b$, il che anche si accorda collo scolio della stessa proposizione.

PROBLEMA I. *Trovare la superficie di un triangolo sferico per mezzo dei suoi tre lati.*

Per far ciò, bisognerà nella formola

$$\cot.\frac{1}{2}S=\frac{\cot.\frac{1}{2}a \cot.\frac{1}{2}b+\cos.C}{\text{sen}.C}$$

sostituire i valori di sen. C e cos. C espressi in a, b, c; ora, si ha $\cos.C=\frac{\cos.c-\cos.a\cos.b}{\text{sen}.a\,\text{sen}.b}$ e $\cot.\frac{1}{2}a\cot.\frac{1}{2}b=\frac{1+\cos.a}{\text{sen}.a}\cdot\frac{1+\cos.b}{\text{sen}.b}$; di qui risulta

$$\cos.C+\cot.\frac{1}{2}a\cot.\frac{1}{2}b=\frac{1+\cos.a+\cos.b+\cos.c}{\text{sen}.a\,\text{sen}.b}.$$

Indi il valore di cos. C dà

$$1+\cos.C=\frac{\cos.c-\cos.(a+b)}{\text{sen}.a\,\text{sen}.b}=\frac{2\,\text{sen}.\frac{a+b+c}{2}\,\text{sen}.\frac{a+b-c}{2}}{\text{sen}.a\,\text{sen}.b}$$

$$1-\cos.C=\frac{\cos.(a-b)-\cos.c}{\text{sen}.a\,\text{sen}.b}=\frac{2\,\text{sen}.\frac{a+c-b}{2}\,\text{sen}.\frac{b+c-a}{2}}{\text{sen}.a\,\text{sen}.b}.$$

Moltiplicando queste due quantità fra di loro ed estraendo la radice dal prodotto si avrà

$$\text{sen}.C=\frac{2\sqrt{\left(\text{sen}.\frac{a+b+c}{2}\,\text{sen}.\frac{a+b-c}{2}\,\text{sen}.\frac{a+c-b}{2}\,\text{sen}.\frac{b+c-a}{2}\right)}}{\text{sen}.a\,\text{sen}.b}.$$

Dunque finalmente

$$\text{cot.}\tfrac{1}{2}\,S=\frac{1+\text{cos.}\,a+\text{cos.}\,b+\text{cos.}\,c}{2\sqrt{\left(\text{sen.}\,\frac{a+b+c}{2}\ \text{sen.}\,\frac{a+b-c}{2}\ \text{sen.}\,\frac{a+c-b}{2}\ \text{sen.}\,\frac{b+a-c}{2}\right)}}$$

Questa formola risolve il problema proposto, ma si può pervenire a un più semplice risultamento.

A tal uopo riprendasi la formola

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,S=\frac{\text{cot.}\,\frac{1}{2}\,a\ \text{cot.}\,\frac{1}{2}\,b+\text{cos.}\,C}{\text{sen.}\,C},$$

se ne ricaverà da prima $1+\text{cot.}^2\frac{1}{2}\,S$, ovvero

$$\frac{1}{\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}S}=\frac{\text{cot.}^2\,\frac{1}{2}\,a\ \text{cot.}^2\,\frac{1}{2}\,b+2\ \text{cot.}\,\frac{1}{2}\,a\ \text{cot.}\,\frac{1}{2}\,b\ \text{cos.}\,C+1}{\text{sen.}^2\,C}.$$

Ora il valore di cos. C dà $2\ \text{cot.}\,\frac{1}{2}\,a\ \text{cot.}\,\frac{1}{2}\,b\ \text{cos.}\,C=\dfrac{\text{cos.}\,c-\text{cos.}\,a\ \text{cos.}\,b}{2\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}a\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}b}$; ponendo nel numeratore, in cambio di cos. c, cos. a, cos. b, i loro valori $1-2\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}\,c$, $1-2\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}\,a$, $1-2\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}\,b$, e riducendo, si avrà

$$2\ \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,a\ \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,b\ \text{cos.}\,C=\frac{\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,a+\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,b-\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,c}{\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,a\ \text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,b}-2.$$

Si ha da altra parte $\text{cot.}^2\frac{1}{2}\,a\ \text{cot.}^2\frac{1}{2}\,b=\dfrac{1-\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,a}{\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,a}\cdot\dfrac{1-\text{sen.}\,\frac{1}{2}}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,b}=$

$$\frac{1-\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,a-\text{sen.}^2\frac{1}{2}b}{\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}a\ \ \text{sen.}\ \frac{1}{2}\,b}+1.$$

Dunque, sostituendo questi valori, si avrà

$$\frac{1}{\text{sen.}^2\frac{1}{2}S}=\frac{1-\text{sen.}^2\frac{1}{2}c}{\text{sen.}^2\frac{1}{2}a\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}\,b\ \text{sen.}^2C},$$

il che dà $\text{sen.}\frac{1}{2}\ S=\dfrac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,a\ \text{sen.}\,\frac{1}{2}\,b\ \text{sen.}\,C}{\text{cos.}\,\frac{1}{2}\,c},$

e, rimettendo il valore di sen. C, si ha

$$\text{sen.} \frac{1}{2} S = \frac{\sqrt{\left(\text{sen.}\frac{a+b+c}{2}\ \text{sen.}\frac{a+b-c}{2}\ \text{sen.}\frac{a+c-b}{2}\ \text{sen.}\frac{b+c-a}{2}\right)}}{2 \cos. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b \cos. \frac{1}{2} c}.$$

Formola comoda per il calcolo logaritmico.

Se si moltiplica questa pel valore di cot. $\frac{1}{2}$ S, ne risulterà

$$\cos. \frac{1}{2} S = \frac{1+\cos. a+\cos. b+\cos. c}{4 \cos. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b \cos. \frac{1}{2} c} = \frac{\cos.^2 \frac{1}{2} a + \cos.^2 \frac{1}{2} b + \cos.^2 \frac{1}{2} c - 1}{2 \cos. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b \cos. \frac{1}{2} c}$$

Nuova formola che ha il vantaggio di esser composta di termini razionali.

Di qui si ricava anche $\dfrac{1-\cos. \frac{1}{2} S}{\text{sen.} \frac{1}{2} S}$, ovvero

$$\text{tang.} \frac{1}{4} S = \frac{1-\cos.^2 \frac{1}{2} a - \cos.^2 \frac{1}{2} b - \cos.^2 \frac{1}{2} c + 2\cos. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b \cos. \frac{1}{2} c}{\sqrt{\left(\text{sen.}\frac{a+b+c}{2}\ \text{sen.}\frac{a+b-c}{2}\ \text{sen.}\frac{a+c-b}{2}\ \text{sen.}\frac{b+c-a}{2}\right)}}$$

Ora, il numeratore di questa espressione può scomporsi in fattori, come già si è fatto per una quantità simile, nota V, problema IV; si avrà così

$$\text{tang.} \frac{1}{4} S = \frac{4\ \text{sen.}\frac{a+b+c}{4}\ \text{sen.}\frac{a+b-c}{4}\ \text{sen.}\frac{a+c-b}{4}\ \text{sen.}\frac{b+c-a}{4}}{\sqrt{\left(\text{sen.}\frac{a+b+c}{2}\ \text{sen.}\frac{a+b-c}{2}\ \text{sen.}\frac{a+c-b}{2}\ \text{sen.}\frac{b+c-a}{2}\right)}}$$

Ma si ha $\dfrac{\text{sen.} \frac{1}{2} p}{\sqrt{\text{sen.}\, p}} = \sqrt{\left(\dfrac{\text{sen.}^2 \frac{1}{2} p}{2\ \text{sen.} \frac{1}{2} p \cos. \frac{1}{2} p}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\ \text{tang.} \frac{1}{2} p\right)}$;

dunque finalmente

$$\text{tang.}\tfrac{1}{4}S = \sqrt{\left(\text{tang.}\frac{a+b+c}{4}\text{tang.}\frac{a+b-c}{4}\text{tang.}\frac{a+c-b}{4}\text{tang.}\frac{b+c-a}{4}\right)}$$

Questa elegantissima formola devesi a Simone Lhuillier.

PROBLEMA II. *Dati i tre lati* BC = a, AC = b, AB = c, (fig. 284) *determinare la posizione del punto* I, *polo del cerchio circoscritto al triangolo* ABC.

Sia l'angolo ACI $=x$, e l'arco AI=CI=BI $=\varphi$; nei triangoli CAI, CBI, si avrà per le note formole, $\cos. x = \frac{\cos.\varphi - \cos. b \cos.\varphi}{\text{sen.} b\, \text{sen.}\varphi} = \frac{1-\cos. b}{\text{sen.} b}\cot.\varphi = \frac{\text{sen.} b}{1+\cos. b}\cot.\varphi$, $\cos.(C-x) = \frac{1-\cos. a}{\text{sen.} a}\cot.\varphi$. Dunque $\frac{\cos.(C-x)}{\cos. x}$ ovvero $\cos. C + \text{sen.} C \,\text{tang.} x + \frac{(1+\cos. b)(1-\cos. a)}{\text{sen.} a\, \text{sen.} b}$; sostituendo in questa equazione i valori di cos. C e sen. C espressi in a, b, c, e facendo, per brevità,
$M = \sqrt{(1-\cos.^2 a - \cos.^2 b - \cos.^2 c + 2\cos. a \cos. b \cos. c)}$, se ne dedurrà $\text{tang.}\, x = \frac{1+\cos. b - \cos. c - \cos. a}{M}$, formola che determina l'angolo ACI. Si può osservare che a cagione dei triangoli isosceli ACI, ABI, BCI, si ha ACI $=\frac{1}{2}(C+A-B)$; si avrebbe parimente BCI $=\frac{1}{2}(B+C-A)$, BAI $=\frac{1}{2}(A+B-C)$. Di qui risultano queste formole notevoli:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+C-B) = \frac{1+\cos. b - \cos. a - \cos. c}{M}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(B+C-A) = \frac{1+\cos. a - \cos. b - \cos. c}{M}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \frac{1+\cos. c - \cos. a - \cos. b}{M}$$

alle quali si può aggiungere quella che dà $\cot.\frac{1}{2}S$, e che può mettersi sotto la forma:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{-1-\cos. a - \cos. b - \cos. c}{M}$$

Il valore di tang. x trovato qui, dà $1+\text{tang.}^2 x$, o $\frac{1}{\cos.^2 x} =$

$\frac{2(1+\cos. b)(1-\cos. c)(1-\cos. a)}{M^2}=\frac{16\cos.^2\frac{1}{2}b\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}c\ \text{sen.}^2\frac{1}{2}a}{M^2}$ dunque $\frac{1}{\cos. x}=\frac{4\cos.\frac{1}{2}b\ \text{sen.}\frac{1}{2}c\ \text{sen.}\frac{1}{2}a}{M}$. Ma dall'equazione $\cos. x=\frac{1-\cos. b}{\text{sen.} b}$ $\cot. \varphi=\text{tang.}\frac{1}{2}b\cot. \varphi$, si ricava $\text{tang.}\varphi=\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}b}{\cos. x}$; dunque $\text{tang.}\varphi=$

$$\frac{4\text{sen.}\frac{1}{2}a\ \text{sen.}\frac{1}{2}b\ \text{sen.}\frac{1}{2}c}{M}=\frac{2\ \text{sen.}\frac{1}{2}a\ \text{sen.}\frac{1}{2}b\ \text{sen.}\frac{1}{2}c}{\sqrt{\left(\text{sen.}\frac{a+b+c}{2}\text{sen.}\frac{a+b-c}{2}\text{sen.}\frac{a+c-b}{2}\text{sen.}\frac{b+c-a}{2}\right)}}.$$

PROBLEMA III. *Determinare sulla superficie della sfera la linea sulla quale sono situati tutti i vertici dei triangoli di uguale base e di uguale superficie.*

Sia ABC (fig. 285) uno dei triangoli sferici dei quali la base comune è $AB=c$, e la superficie data $A+B+C-\pi=S$. Sia IPK una perpendicolare indefinita elevata dal punto di mezzo di AB; preso IP uguale al quadrante, P sarà il polo dell'arco AB, e l'arco PCD menato pei punti P, C, sarà perpendicolare sopra AB. Sia $ID=p$, $CD=q$; i triangoli rettangoli ACD, BCD, nei quali si ha $AC=b$, $BC=a$, $AD=p+\frac{1}{2}c$, $BD=p-\frac{1}{2}c$, daranno $\cos. a=\cos. q\cos.(p-\frac{1}{2}c)$, $\cos. b=\cos. q\cos.(p+\frac{1}{2}c)$. Ma si è trovato di sopra:

$$\cot.\frac{1}{2}S=\frac{1+\cos. a+\cos. b+\cos. c}{\text{sen.} a\ \text{sen.} b\ \text{sen.} C};$$

sostituendo in questa formola i valori $\cos. a+\cos. b=2\cos. q\cos. p\cos.\frac{1}{2}c$, $1+\cos. c=2\cos.^2\frac{1}{2}c$, $\text{sen.} b\ \text{sen.} C=\text{sen.} c\ \text{sen.} B=2\ \text{sen.}\frac{1}{2}c\cos.\frac{1}{2}c\ \text{sen.} B$; si avrà

$$\cot.\frac{1}{2}S=\frac{\cos.\frac{1}{2}c+\cos. p\cos. q}{\text{sen.} a\ \text{sen.}\frac{1}{2}c\ \text{sen.} B}$$

Da altra parte nel triangolo rettangolo BCD, si ha pure $\text{sen.} a\ \text{sen.} B=$

sen. q ; dunque cot. $\frac{1}{2}S = \dfrac{\cos.\frac{1}{2}c + \cos.p\ \cos.q}{\text{sen}.\frac{1}{2}c\ \text{sen}.q}$, o $\cos.p\ \cos.q = \cot.\frac{1}{2}S$

sen. $\frac{1}{2}c$ sen. $q - \cos.\frac{1}{2}c$; è questa la relazione tra p e q che dee determinare la linea sulla quale sono situati tutti i punti C.

Prolungata IP di una quantità $PK = x$, congiungasi KC e sia $KC = y$; nel triangolo PKC, nel quale si ha $PC = \frac{1}{2}\pi - q$ e l'angolo $KPC = \pi - p$, il lato KC si troverà colla formola $\cos.KC = \cos.KPC\ \text{sen}.PK\ \text{sen}.PC + \cos.PK\ \cos.PC$, o

$$\cos.y = \text{sen}.q\ \cos.x - \text{sen}.x\ \cos.q\ \cos.p;$$

nella quale sostituendo in luogo di $\cos.q\ \cos.p$ il suo valore $\cot.\frac{1}{2}S\ \text{sen}.\frac{1}{2}c$ — sen. q cos. $\frac{1}{2}c$, si avrà

$$\cos.y = \text{sen}.x\ \cos.\frac{1}{2}c + \text{sen}.q\ (\cos.x - \text{sen}.x\ \cot.\frac{1}{2}S\ \text{sen}.\frac{1}{2}c).$$

Vedesi da ciò che se si prende $\cos.x - \text{sen}.x\ \cot.\frac{1}{2}S\ \text{sen}.\frac{1}{2}c = 0$ ovvero $\cot.x = \cot.\frac{1}{2}S\ \text{sen}.\frac{1}{2}c$, si avrà $\cos.y = \text{sen}.x\ \cos.\frac{1}{2}c$, e così il valore di y diverrà costante.

Dunque se dopo aver condotto l'arco IP perpendicolare sul punto medio della base AB, si prende al di là del polo la parte PK tale che $\cot.PK = \cot.\frac{1}{2}S\ \text{sen}.\frac{1}{2}c$, tutti i vertici dei triangoli che hanno la stessa base c e la stessa superficie S, saranno situati sul cerchio minore descritto dal punto K come polo alla distanza KC tale che $\cos.KC = \text{sen}.PK\ \cos.\frac{1}{2}c$.

Questo bel teorema devesi al Lexell. (Veggansi *Nova, Acta, Petropolitana*, tomo V, part. I).

NOTA IX.

Sulla proposizione II, libro IV, parte II.

Questa proposizione si può dimostrare più rigorosamente riconducendola ai lemmi preliminari nel modo che segue.

Dico da prima che la superficie convessa terminata dai lati AF, BG (fig. 252)

e dagli archi AuB, FxG, non potrebbe essere minore del rettangolo $ABGF$, parte corrispondente della superficie del prisma iscritto.

In fatti, sia S la superficie convessa in quistione, e sia, se è possibile, il rettangolo $ABGF$ ovvero $AB \times AF = S + M$, essendo M una quantità positiva.

Si prolunghi l'altezza AF del prisma e del cilindro fino ad una distanza AF' uguale ad n volte AF, essendo n un numero intero qualunque; se si prolungano nel medesimo tempo il cilindro e il prisma, è chiaro che la superficie convessa S' compresa fra le costole AF', BG', conterrà n volte la superficie S; in modo che si avrà $S' = nS$, e poichè $n \times AF = AF'$, si avrà $AB \times AF' = nS + nM = S' + nM$. Ora essendo n un numero intero ad arbitrio, ed M una superficie data, si può prendere n in modo che si abbia nM maggiore del doppio del segmento AuB, perocchè basta per questo che si faccia $n > \frac{2AuB}{M}$; dunque allora il rettangolo $AB \times AF'$ o la superficie piana $ABG'F'$ sarebbe maggiore della superficie che l'inviluppa, composta dalla superficie convessa S' e da due segmenti circolari uguali AuB, $F'xG'$. Ora, per contrario, la seconda superficie è maggiore della prima, secondo il primo lemma preliminare; dunque 1° non si può avere $S < ABGF$.

Dico in secondo luogo che la stessa superficie convessa S non potrebbe essere uguale a quella del rettangolo $ABGF$. Imperocchè supponiamo, se è possibile, che prendendo $AE = AB$, la superficie convessa AMK sia uguale al rettangolo $AFKE$; da un punto qualunque M dell'arco AME, si conducano le corde AM, ME, e si elevi MN perpendicolare sul piano della base. I tre rettangoli $AMNF$, $MEKN$, $AEKF$, avendo uguale altezza, stanno fra loro come le basi AM, ME, AE. Ora si ha $AM + ME > AE$, dunque la somma dei rettangoli $AMNF$, $MEKN$ è maggiore del rettangolo $AFKE$. Quest'ultimo è equivalente, per ipotesi, alla superficie convessa AMK, composta dalle due superficie parziali AN, MK. Dunque la somma dei rettangoli $AMNF$, $MEKN$ è maggiore della somma delle superficie convesse corrispondenti AN, MK. Bisognerà dunque che uno almeno dei rettangoli $AMNF$, $MEKN$ sia maggiore della superficie convessa corrispondente. Questa conseguenza è contraria alla prima parte già dimostrata. Dunque 2° la superficie convessa S non potrebbe essere uguale a quella del rettangolo corrispondente $ABGF$.

Da ciò segue che si ha $S > ABGF$, e che però la superficie convessa del cilindro è maggiore di quella di ogni prisma iscritto.

Con un ragionamento assolutamente simile, si proverà che la superficie convessa del cilindro è minore di quella di ogni prisma circoscritto.

NOTA X.

Sulla eguaglianza e la simiglianza dei poliedri.

In fronte al libro XI di Euclide si trovano le definizioni 9 e 10 così concepite:

9. *Due solidi sono simili quando sono compresi da uno stesso numero di piani simili ciascuno a ciascuno.*

10. *Due solidi sono uguali e simili, quando sono compresi da uno stesso numero di piani uguali e simili ciascuno a ciascuno.*

Sendo l'obbietto di queste definizioni uno dei punti più difficili degli elementi di geometria, noi lo verremo esaminando minutamente, e in pari tempo discuteremo le osservazioni fatte a tal uopo da Roberto Simson nella sua edizione degli elementi, pag. 388 e seg.

Primieramente osserveremo con Roberto Simson che la definizione 10 non è proprio una definizione, sibbene un teorema che si dee dimostrare; perocchè non è evidente che due solidi siano uguali per questo solo che hanno le facce uguali; e se questa proposizione è vera, bisogna dimostrarla o colla sovrapposizione o in ogni altro modo. Indi si vede che il vizio della definizione 10 è comune alla definizione 9. Imperocchè, se la definizione 10 non è dimostrata, si potrà credere che esistono due solidi disuguali e dissimili le cui facce siano uguali; ma allora, secondo la definizione 9, un terzo solido che avesse le facce simili a quelle dei due primi, sarebbe simile a ciascuno di essi, e però simile a due corpi di forma differente, conchiusione che implica contraddizione, o almeno che non si accorda punto coll' idea che si affigge naturalmente alla parola *simile*.

Parecchie proposizioni dei libri XI e XII di Euclide sono fondate sulle definizioni 9 e 10; fra l' altre la proposizione XXVIII, libro XI, dalla quale dipende la misura dei prismi e delle piramidi. Sembra dunque che potrebbesi apporre agli elementi di Euclide di contenere un numero ben grande di proposizioni le quali non sono rigorosamente dimostrate. Tuttavia evvi una circostanza la quale serve a scemare tale accusa, e che non vuolsi omettere.

Le figure delle quali Euclide dimostra l' uguaglianza o la simiglianza fondandosi sulle definizioni 9 e 10, sono tali che i loro angoli poliedri non riuniscono più di tre angoli rettilinei: ora, se due angoli triedri sono composti da angoli rettilinei rispettivamente uguali, è dimostrato ben chiaro in vari luoghi di Euclide che questi angoli triedri sono uguali. Da altro canto, se due poliedri hanno le facce uguali o simili rispettivamente, gli angoli poliedri omologhi saranno composti da uno stesso numero di angoli rettilinei rispettivamente uguali. Adunque, sempre che gli angoli rettilinei non siano in maggior numero di tre in ciascun angolo poliedro, è chiaro che gli angoli poliedri omologhi sono ugua-

li. Ma se le facce omologhe sono uguali e gli angoli poliedri omologhi uguali, non è più dubbio che i due poliedri siano uguali, perchè potranno essere soprapposti, o almeno saranno simmetrici fra loro. Vedesi dunque che l'enunciato delle definizioni 9 e 10 è vero e ammissibile, almeno nel caso degli angoli triedri, ch'è il solo di cui Euclide siasi servito. In questo modo il rimprovero d'inesattezza che potrebbesi fare a questo autore, o ai suoi commentatori, cessa di essere così grave, e non cade più che sopra alcune restrizioni e spiegazioni ch'ei non ha date.

Rimane ad esaminare se l'enunciato della definizione 10, il quale è vero nel caso degli angoli triedri, è vero generalmente. Il Simson assicura che non è, e che si ponno costruire due poliedri disuguali i quali saranno compresi da uno stesso numero di facce rispettivamente uguali. Egli cita, a puntello della sua asserzione, un esempio che si può generalizzare così.

Se ad un poliedro qualunque si aggiunga una piramide, dandole per base una delle facce del poliedro; se poi, invece di aggiungere la piramide, la si sottragga, si avranno così due nuovi poliedri che avranno le facce rispettivamente uguali, e intanto questi due poliedri sono disuguali.

Non è dubbio alcuno sulla disuguaglianza dei due poliedri così costruiti; ma osserveremo che uno di questi poliedri contiene angoli poliedri rientranti; ora è più che possibile che Euclide ha inteso escludere i corpi irregolari che hanno delle cavità o degli angoli poliedri rientranti, e che si è limitato ai poliedri convessi. Ammettendo questa restrizione, senza la quale da altra parte altre proposizioni non sarebbero vere, l'esempio del Simson punto non conchiude contra la definizione o il teorema di Euclide.

Che che ne sia, segue da tutte queste osservazioni che le definizioni 9 e 10 di Euclide non possono essere conservate tali quali sono. Il Simson sopprime la definizione dei poliedri eguali, la quale in fatti non vuolsi allogare che fra i teoremi; e definisce *poliedri simili* quelli i quali sono compresi da un medesimo numero di piani simili, e che hanno gli angoli poliedri rispettivamente uguali. Questa definizione è vera, ma ha l'inconveniente di contenere molte condizioni superflue. Se si sopprimesse la condizione degli angoli poliedri uguali, si ricadrebbe nell'enunciato di Euclide, il quale è difettoso in quanto che suppone la dimostrazione del teorema sui poliedri uguali. A scanso di ogni imbarazzo, abbiam creduto a proposito di dividere la definizione dei poliedri simili in due parti: primieramente abbiamo data la definizione dei tetraedri simili, indi abbiamo definiti poliedri simili a quelli che hanno le basi simili, e i cui vertici omologhi fuori di questa base sono determinati da tetraedri simili rispettivamente.

Questa condizione esige per le basi, supponendole triangolari, due condizioni, e per ciascuno dei vertici fuori di questa base, tre condizioni; in maniera che, se S è il numero degli angoli poliedri di ciascuno dei poliedri, la simiglianza di questi due poliedri esigerà $2+3(S-3)$ angoli uguali da ambe le parti, o $3S-7$ condizioni; e niuna di queste condizioni non è superflua o compresa

nelle altre. Imperocchè noi qui consideriamo due poliedri come aventi semplicemente lo stesso numero di vertici o di angoli poliedri; allora ci bisognano rigorosamente e senza ometterne una le $3S-7$ condizioni perchè i due poliedri siano simili; ma se si supponesse innanzi tratto ch' ei sono *della stessa specie* entrambi, cioè che hanno uno stesso numero di facce, e che queste facce paragonate ciascuna a ciascuna abbiano lo stesso numero di lati, questa supposizione racchinderebbe alcune condizioni nel caso che vi fossero delle facce di più di tre lati, e queste condizioni diminuirebbero di altrettanto il numero $3S-7$, in maniera che in cambio di $3S-7$ condizioni non ve ne bisognerebbero più di $A-1$; su di che veggasi la nota VIII. Da ciò è manifesto quello che dà luogo alla difficoltà di stabilire una buona definizione dei poliedri simili; ed è ch' ei possono considerarsi della medesima specie, o solamente come aventi lo stesso numero di angoli poliedri. In quest' ultimo caso ogni difficoltà è dissipata, e fa d' uopo che le $3S-7$ condizioni rinchiuse nella definizione siano adempite tutte perchè i poliedri siano simili, e se ne conchinderà a più forte ragione ch' ei sono della medesima specie. Del resto, sendo completa la nostra definizione, noi ne abbiamo dedotto come teorema la definizione del Simson.

È palese dunque ch' egli è possibile di far senza, negli elementi, del teorema che concerne l' eguaglianza dei poliedri; ma, siccome questo teorema è per sè stesso di gran momento, mi si saprà buon grado di trovarne qui la dimostrazione, la quale servirà a completare la teorica dei poliedri [1].

La quistione che fa d' uopo esaminare si è di conoscere se, facendo variare le inclinazioni dei piani che compongono la superficie di un poliedro convesso dato, si può formare un secondo poliedro convesso, compreso dagli stessi piani poligoni riuniti fra loro nello stesso ordine.

Osserveremo da prima, che se ci ha un secondo poliedro il quale soddisfa alla quistione, non può esser questo il poliedro simmetrico del poliedro dato, perocchè in questi due poliedri i piani uguali sono disposti in un ordine inverso attorno gli angoli poliedri corrispondenti. Sicchè la considerazione dei poliedri simmetrici si dee totalmente escludere dall' obbietto che ci occupa.

Osserveremo in secondo luogo, che se il poliedro dato contiene uno o più angoli triedri, questi angoli sono di natura loro invariabile, perchè la conoscenza di tre angoli rettilinei è sufficiente a determinare la scambievole inclinazione di questi piani, quando si riuniscono in angolo poliedro. Si possono dunque sopprimere nel solido proposto tutti i tetraedri che formano gli angoli triedri [2]; e se il nuovo poliedro che risulta da questa soppressione, offre ancora degli

1 La dimostrazione che qui diamo è la stessa, salvo alcuni svolgimenti, di quella che il Cauchy presentò all' Istituto nel 1812, e ch' egli ha scoperta partendo da alcune idee che erano state proposte per il medesimo obbietto nella prima edizione di questi Elementi, pag. 327 e seg.

2 Se una medesima costola fosse comune a due angoli triedri, non si sopprimerebbe nella prima operazione che un solo di questi angoli.

angoli triedri, si potranno questi parimente sopprimere, e così successivamente, fino a che si pervenga ad uo poliedro i cui angoli policdri oon riuniscano meno di quattro angoli rettilinei ciascuno. In fatti, se il solido proposto può cangiar figura per variazioni qualunque nelle inclioazioni dei suoi piani, questo cangiamento noo può aver luogo sui tetraedri sottratti, e dovrà operarsi tutto intero sul poliedro che resta dopo la soppressione di tutti i tetraedri. Noi dunque non ci occuperemo in tutto ciò che segue, se non dei poliedri i cui angoli riuniscano almeoo quattro angoli rettilinci.

Posto ciò, sia S (fig. 286) uno qualunqua degli aogoli poliedri del poliedro, e sia descritto, col vertice S come centro una superficie sferica la cui intersezione coi piaoi dell' angolo poliedro formerà il poligooo sferico ABCDEF. I lati AB, BC, ec. di questo poligono servono di misura agli angoli rettilioci ASB, BSC, ec. e sono per conseguenza invariabili; quanto agli angoli A, B, C, ec. del poligono, ciascuno di essi è la misura dell' inclinazioоe di due piani adiacenti dell' angolo poliedro; così l' angolo B è la misura dell' ioclinazionc dei piani ASB, SBC, che noi chiameremo, per brevità, *inclinazione sulla costola* SB, parimente l' angolo C è la misura dell' inclinazione sulla costola SC, e così di seguito.

Potremo dunque giudicare dei cangiamenti di figura di ciascuo angolo poliedro S, da quelli del poligono sferico ABCDEF i cui lati sooo costanti e i cui angoli variano in un modo qualunque, purchè il poligono noo cessi di essere convesso. Ora, in questi poligoni i segoi delle variazioni sugli angoli offrono alcune leggi assai notevoli, che noi saremo per esporre nei due lemmi che seguono.

LEMMA I.

Dati tutti i lati* AB, BC, CD, DE (fig. 286), *eccetto l'ultimo* AF, *se si fa variare uno degli angoli* B, C, D, E, *opposti al lato* AF, *essendo gli altri costanti, dico che il lato* AF *aumenterà se l'angolo aumenterà, e diminuirà se l' angolo diminuisce. In ogni caso, si suppone che il poligono è convesso prima e dopo il suo cangiamento di figura.

Suppooiamo primieramente che si faccia variare l'angolo B, essendo costante gli altri tre C, D, E; se si congiunge BF, la figura BCDEF non soffrirà variazіooe alcuna, e BF sarà costante. Si avrà dunque uo triangolo sferico ABF i cui lati AB, BF sono costanti, e nel quale l'angolo ABF varia di una stessa quantità che l' angolo ABC del poligono, perchè la parte FBC rimane costante. Ora, per le note proprietà, si sa che il lato AF aumenterà se l'angolo ABF aumenta, e che diminuisce se l' angolo ABF diminuisce.

Supponiamo ora che l'angolo C varia, gli altri tre B, D, E essendo costaoti;

se si tirano le diagonali AC, FC è manifesto che queste rimarranno costanti, al pari degli angoli ACB, FCD; si avrà dunque ancora un triangolo sferico ACF, i cui lati AC, CF sono costanti e nel quale l'angolo ACF varia della stessa quantità che l'angolo C del poligono; dal che si conchiuderà che il lato AF aumenterà se l'angolo C aumenta e diminuirà se l'angolo C diminuisce.

È manifesto che lo stesso ragionamento può applicarsi alla variazione di uno degli angoli D ed F, e che avrebbe ugualmente luogo per ogni altro poligono sferico di più di tre lati. Sicchè la conclusione sarà in tutti i casi conforme all'enunciato della proposizione, se tuttavia il poligono è convesso prima e dopo il cangiamento di figura. Questa restrizione è necessaria, perchè se l'angolo E, per esempio, diminuisse fino a che il punto F cadesse sulla diagonale AE, allora AF sarebbe un *minimo*; e se a contare da questo numero si continuasse a diminuire l'angolo E, è visibile che il lato AF aumenterebbe in cambio di diminuire; ma in quest'ultimo caso, l'angolo AFE diverrebbe un angolo rientrante, e il poligono cesserebbe di essere convesso.

Corollario. Poste le medesime cose, se vari angoli di quelli opposti all'ultimo lato AF aumentano, e niuno di essi non diminuisce, il lato AF aumenterà necessariamente per l'effetto di tutte le variazioni riunite. Il contrario avverrà, se vari angoli di quelli opposti al lato AF diminuiscono, e niuno d'essi non aumenta.

Perocchè, se per l'effetto dell'aumento o della diminuzione simultanea, gli angoli A, B, C, ec. del poligono debbono essere cangiati in A', B', C', ec. si potrà passare successivamente dal poligono proposto a quello che non contiene se non un angolo variato A'; da questo al poligono il quale non contiene se non i due angoli A' e B', e così di seguito. Ora in ciascuno di questi passaggi, l'applicazione della proposizione è manifesta, e conduce sempre al medesimo risultamento.

LEMMA II.

Dato un poligono sferico convesso i cui lati sono costanti e che ne ha più di tre, se si fanno variare gli angoli in un modo qualunque, senza che il poligono cessi pertanto di essere convesso: se si pone in seguito il segno + al vertice di ciascun angolo che aumenta e il segno — al vertice di ciascun angolo che diminuisce, e non si ponga niun segno agli angoli che rimangono costanti; dico che facendo il giro del poligono, si dovranno trovare almeno quattro cangiamenti di segno da un vertice al vertice seguente.

In fatti 1° se n è il numero degli angoli del poligono, non vi potrebbero essere $n-2$ angoli consecutivi che aumentino insieme, o dei quali altri aumenti-

no altri diminuiscano; perchè se uno di questi casi avvenisse, ne seguirebbe, pel corollario del lemma precedente, che il lato del poligono che è opposto a questi $n-2$ angoli, aumenterebbe; il che è contrario all'ipotesi che tutti i lati del poligono sono costanti. Per una simile ragione, non si potrà supporre che $n-2$ angoli del poligono diminuiscano insieme, o che alcuni diminuiscano rimanendo gli altri costanti. Dunque nella serie di $n-2$ angoli consecutivi, vi dovrà essere almeno un cangiamento di segno; a più forte ragione questo cangiamento dovrà essere osservato nella serie degli n angoli consecutivi, quando si farà l'intiero giro del poligono.

2.° Le variazioni negli angoli del poligono non possono esser tali, che offrano solamente una serie di segni + e una di segni —, in modo che non vi abbiano che due cangiamenti di segno nell'intiero giro del poligono.

Imperocchè siano, per esempio, A, B, C (fig.287) i tre angoli notati col segno +, e D, E, F, G i quattro notati col segno — (questa ipotesi comprende quella nella quale vi sarebbe un numero di segni minore in ciascuna serie, a ragione della invariabilità di alcuni angoli). Se la figura rappresenta lo stato iniziale del poligono, la diagonale GD dovrà aumentare quando si aumenteranno tutti gli angoli A, B, C, o solamente alcuni di loro; ma la stessa diagonale GD, come appartenente al poligono GFED, di cui gli altri lati sono costanti, dovrà diminuire insieme cogli angoli F ed E, o almeno restar costante, se dei quattro angoli D, E, F, G, non ci ha che D e G, o solamente uno di essi che diminuisce; dunque l'ipotesi di cui si tratta non potrebbe aver luogo; dunque la variazione degli angoli non può esser tale, che offra solamente due serie, l'una di segni +, l'altra di segni —.

3.° È anche impossibile che facendo il giro del poligono, non si trovino se non tre serie alternative di segni + e di segni —; perchè, in questa ipotesi, la prima e la terza serie sarebbero di medesimo segno, e si seguirebbero immediatamente, in modo che non formerebbero che una sola serie; dal che si vede che in realtà non vi sarebbero nel giro del poligono che due serie, l'una di segni +, l'altra di segni —; il che abbiamo dimostrato impossibile.

Dunque finalmente, i cambiamenti di segno che si troveranno facendo il giro del poligono, debbono essere almeno quattro.

Corollario. Quello che abbiamo dimostrato pei poligoni sferici si applica immediatamente agli angoli poliedri dei quali questi poligoni sono la misura. Sicchè, *dato un angolo poliedro convesso, che riunisca più di tre piani, se si fanno variare le inclinazioni sulle costole in un modo qualunque, tale però che l'angolo poliedro non cessi di essere convesso; se in seguito si pone il segno + o il segno — su di ciascuna costola, secondo che l'inclinazione su questa costola aumenta o diminuisce, e non si notino con niun segno le costole sulle quali l'inclinazione rimane costante, dico che facendo il giro dell'angolo poliedro, si dovranno trovare almeno quattro cangiamenti di segno da una costola alla seguente.*

Per mezzo di questa proposizione e del teorema di Eulero sui poliedri (25,

III, part. II), noi possiamo ora dimostrare in tutta la sua generalità il teorema che segue.

TEOREMA

Dato un poliedro convesso, i cui angoli non siano triedri, è impossibile di far variare le inclinazioni dei piani di questo poliedro, in modo da produrre un secondo poliedro che sarebbe formato coi medesimi piani disposti fra loro nella stessa maniera che nel poliedro dato.

Per dimostrare questa proposizione, fa d'uopo distinguere due casi, secondo che si fanno variare le inclinazioni su tutte le costole, o solamente alcuna di queste inclinazioni.

PRIMO CASO.

Supponiamo che si facciano variare insieme le inclinazioni su tutte le costole, e sia N il numero totale dei cangiamenti di segno che si troveranno da una costola alla seguente, facendo il giro di ciascun angolo poliedro.

Si è veduto nel lemma II che il numero dei cangiamenti di segno non può essere minore di quattro per ciascun angolo poliedro.

Dunque se si chiama S il numero degli angoli poliedri, si avrà $N > 4S$, non escludendo l'eguaglianza col segno $+$.

Osservo ora che due costole consecutive di un angolo poliedro appartengono sempre ad una faccia del poliedro, e non appartengono che ad una sola; dunque il numero totale dei cangiamenti di segno osservati sulle costole consecutive di ciascun angolo poliedro, deve essere uguale al numero totale dei cangiamenti di segno osservati sui lati consecutivi di ciascuna faccia; perchè non vi è niun cangiamento di segno in un sistema che non corrisponda a un simile cangiamento nell'altro.

Ora, per ciascuna faccia triangolare, il numero dei cangiamenti di segno non può essere maggiore di due; perocchè facendo rientrare in sè medesima la serie $+ - +$, o la serie $+ - -$, non si ottengono che due cangiamenti di segno.

Per ciascuna faccia quadrangolare, il numero dei cangiamenti di segno è quattro al più, il che è evidente.

In generale, se il numero dei lati di una faccia è pari, $= 2n$, il maggior numero dei cangiamenti di segno che si possano trovare facendo il giro dei lati, è $2n$; il che avrà luogo quando i lati portano alternativamente i segni $+$ e $-$.

Ma se il numero dei lati di una faccia è impari, $= 2n + 1$, il maggior nu-

mero dei cangiamenti di segno, sarà $2n$ solamente, perchè dando alternativamente ai lati i segni + e —, il primo e l'ultimo avranno necessariamente il medesimo segno; il che forma meno cangiamenti che lati.

Posto ciò, sia a il numero dei triangoli, b il numero dei quadrilateri, c il numero dei pentagoni, ec. i quali compongono la superficie del poliedro dato; risulta da ciò che si è detto or ora, che il numero totale dei cangiamenti di segno osservati nel fare il giro di ciascuna faccia, non può eccedere $2a$ sulle facce triangolari, $4b$ sulle facce di quattro lati, $4c$ su quelle di cinque lati, $6d$ su quelle di sei lati. Dunque si avrà:

$$N > 2a + 4b + 4c + 6d + 6e + 8f + 8g + \text{ec.}$$

Sia A il numero dei lati del poliedro, ed H quello delle sue facce, si avrà:

$$2A = 2a + 4b + 4c + 6d + 6e + 8f + 8g + \text{ec.}$$

$$H = a + b + c + d + e + f + g + \text{ec.}$$

Ma, secondo il teorema di Eulero, $S + H = A + 2$; dunque $4S = 8 + 4A - 4H$, e facendo le sostituzioni:

$$4S = 8 + 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \text{ec.}$$

Paragonando questo valore al limite trovato di sopra, se ne ricava:

$$N < 4S - 8$$

Ma non si può avere a un'ora $N > 4S$ ed $N < 4S - 8$; dunque è impossibile che le inclinazioni sulle costole del poliedro variano tutte insieme, senza distruggere la coerenza dei piani che formano la superficie del poliedro.

SECONDO CASO.

Supponiamo ora che le inclinazioni sulle costole non variino tutte insieme e che ve ne siano alcune che rimangono costanti:

Sia FI (fig. 204) una di queste costole; si potrà immaginare ch'ella sia soppressa, e che le due facce adiacenti FIG, EFHI si riuniscono in un solo non piano terminato dal contorno di forma invariabile EFGHI. Chiamiamo S, H', ed A' ciò che divengono i numeri S, H ed A dopo la soppressione di una costola; avremo $H' = H - 1$, ed $A' = A - 1$; da altro canto si ha $S' = S$, perchè il numero degli angoli poliedri è lo stesso nei due solidi; dunque si avrà $S' + H' - A' = S + H - A = 2$. Dal che si vede che il teorema di Eulero si avvera anche nel nuovo solido il quale ha una costola di meno ed una faccia di meno, perocchè le facce si sono riunite in un solo non piano.

Se da questo secondo solido si toglie ancora una delle sue costole sulle quali l'inclinazione rimane invariabile, la soppressione di questa costola occasionerà nuovamente la riunione di due facce contigue in una sola; e si proverà parimente che il teorema di Eulero si avvera anche dal terzo solido che risulta dalla soppressione delle due costole.

Si può continuare a sopprimere quante costole si vogliano, purchè questa soppressione non tragga seco quella di niun angolo poliedro; e il teorema di Eulero si avvererà sempre nel solido che rimarrà; e questo può vedersi anche direttamente e generalmente, esaminando la dimostrazione da noi data del teorema di Eulero; in fatti questa dimostrazione non suppone già che le facce del poliedro siano piane; essa avrebbe ugualmente luogo, quando pure queste facce fossero terminate da contorni non situati nei medesimi piani; solamente suppone che ciascun contorno sia rappresentato, secondo la nostra costruzione da un poligono sferico, e che la somma delle superficie di questi poliedri, sia eguale alla superficie della sfera. Ed anche non è necessario che tutti questi poligoni siano convessi; basta che ciascuno di essi possa essere considerato come la somma di più poligoni convessi; il che sempre avverrà, quando, con la soppressione di varie costole appartenenti al poliedro dato, varie facce piane si riuniranno in un solo non piano; perocchè allora il poligono sferico che lo rappresenta, sarà composto dalla somma dei poligoni sferici convessi che rappresentavano le facce piane soppresse.

Veniamo ora al caso in cui la soppressione delle costole sulle quali l'inclinazione non varia, trae seco quella di uno o di più angoli poliedri, sia perchè le inclinazioni su tutte le costole, in ciascuno di questi angoli, sono invariabili, sia perchè le inclinazioni non potessero variare che sopra tre lati solamente, e che fossero allora necessariamente costanti.

Supponiamo da prima che non si sopprima se non un solo angolo poliedro, e sia m il numero delle facce di questo angolo, o il numero di costole che metton capo al suo vertice. Sopprimendo l'angolo poliedro di cui si tratta, si sopprimeranno in pari tempo m costole, e le m costole che formano l'angolo poliedro si ridurranno ad una sola; dunque se si chiamano S', A', H', quello che diverranno i numeri S, A, H, dopo la soppressione di un angolo poliedro, si avrà $S' = S - 1$, $A' = A - m$, $H' = H - (m - 1)$. Si ricava di qui $S' + H' - A' = S + H - A = 2$. Adunque il teorema di Eulero ha luogo ancora nel novello poliedro.

È chiaro ora che si possono sopprimere quanti angoli poliedri si vogliono del poliedro dato, e che il teorema di Eulero si avvererà sempre nel solido che rimarrà; perchè, sopprimendo gli angoli poliedri ad uno ad uno, si hanno successivamente differenti poliedri, dei quali due consecutivi rientrano nel caso da noi qui esaminato.

Dunque in generale se dal poliedro proposto si sopprimano tutte le costole sulle quali l'inclinazione non varia; sia che con tale soppressione il numero degli angoli poliedri rimanga lo stesso, sia che divenga minore, il poliedro che

rimane soddisferà sempre al teorema di Eulero, cioè che chiamando s, h, a, le quantità che per questo poliedro corrispondono alle quantità S, H, A, del poliedro proposto, si avrà $s+h-a=S+H-A=2$.

Ma in quest'ultimo poliedro le inclinazioni sulle costole dovranno cangiare tutte insieme, perocchè sonosi soppresse tutte quelle costole sulle quali l'inclinazione non varia; dunque questo solido rientra nel primo caso; dunque il simultaneo cangiamento di tutte queste inclinazioni non potrebbe aver luogo senza snaturare il poliedro.

Dunque finalmente un poliedro convesso qualunque non può essere cangiato in un altro poliedro convesso il quale sarebbe compreso dagli stessi piani poligoni, e disposti nello stesso ordine gli uni per rispetto agli altri.

FINE DELLE NOTE.

CONSIGLIO GENERALE DI PUBBLICA ISTRUZIONE

Napoli 5 giugno 1852

Vista la domanda del Tipografo Raffaele Marotta con che ha chiesto di porre a stampa l'opera intitolata = Elementi di Geometria di A. M. Legendre con note ed aggiunzioni di Errico de Angelis = Visto il parere del R. Revisore Signor D. Francesco Bruno. = Si permette che la suddetta opera si stampi; però non si pubblichi senza un secondo permesso che non si darà se prima lo stesso R. Revisore non avrà attestato di aver riconosciuto nel confronto esser l'impressione uniforme all'originale approvato.

Il Presidente interino: Francesco Saverio Apuzzo
Il Segretario interino: Giuseppe Pietrocola.

Elemen
5
6
13
14
15
19
21
24
29
30
33
NA

38
39
41
42
44
45
46
50
51
52
56
57
58

62
66
67
68
73
74
77
78
82
83

86
87
88
92
93
94
95
98
99
100
103
104
105
106
110
111
112

116
117
118
119
122
123
124
125
129
130
131
135
136
137
139
140
141

145

150

151

153

154

155

159

160

165
166
169
170
171
175
176
177

180
181
182
185
186
188
189
190
192
193

196
197
198
201
202
203
207
210

215
218
225
224
219
226
17

230
231
234
235
238
239
240
241
244
245
246

251
252
253
254
255
258
259
264
265
266
267
268

271 272 273 275 279 280 281 285 286 287 78